CARRERA DE MATEMATICAS

SEMESTRE II/2018
ANALISIS II

INTEGRACION (QP , 8 Diciembre,2018)

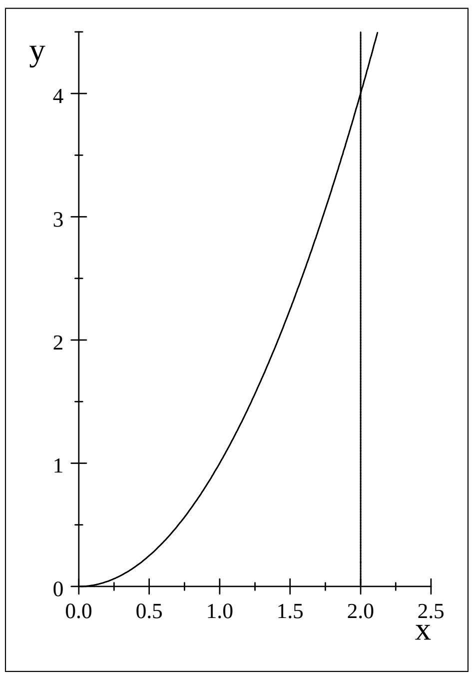
1. INTEGRACION

El concepto de integral de una función de una sola variable sobre un intervalo estudiado en el Cálculo I, se extiende de manera natural primero a funciones de dos variables sobre una región plana y después a funciones de tres variables sobre un sólido. Estas ideas se utilizan en el cálculo de áreas de regiones planas y al cálculo de volúmenes; además de otras magnitudes geométricas y/o físicas.

Históricamente el problema que dio origen al cálculo integral es el cálculo del área de una figura con borde curvilíneo,

Por ejemplo: Se desea calcular el área limitado superiormente por $y = x^2$ (o $f(x) = x^2$) , inferiormente por $y = 0$; y lateralmente por $x = 2$

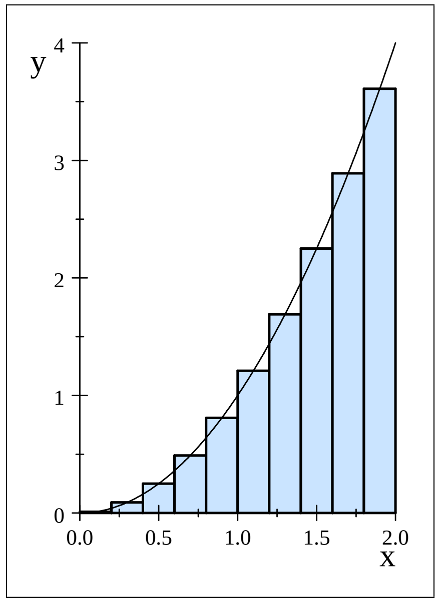
$y - x^2 = 0$



Intuitivamente, podemos considerar la figura dada como un "*rectángulo con altura variable*", altura que varía desde 0 hasta 4.

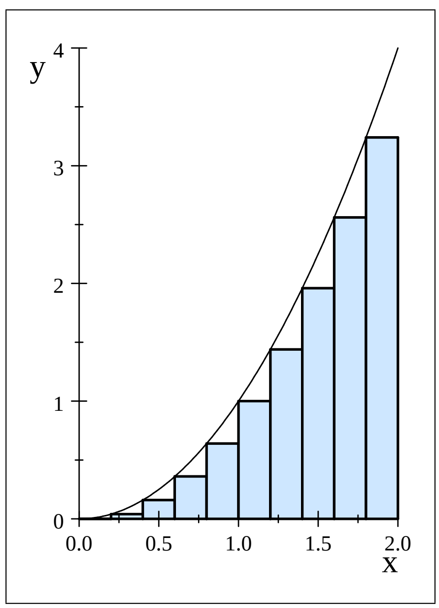
Sin embargo, "*desintegrando*" la figura en $n = 10$ piezas,- en elementos tipo "*rectángulo*"-; y tomando como altura de la función - para todo el "pedazo" , la altura que corresponde al punto medio; se tiene la figura:

$y = x^2$



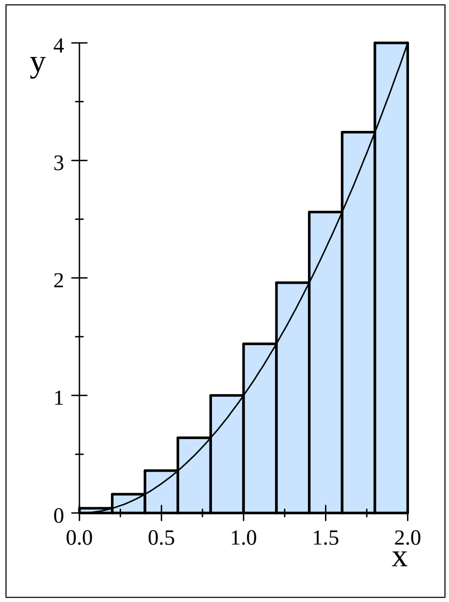
Tomando como altura de la función - para todo el "pedazo" , la altura que corresponde al punto extremo izquierdo; se tiene la figura:

$y = x^2$

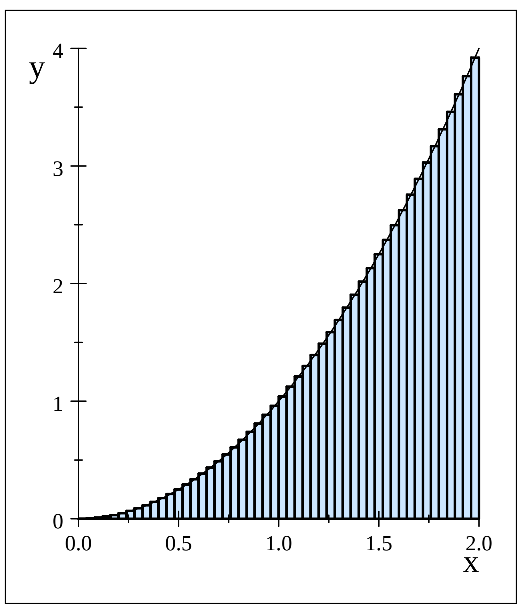


Tomando como altura de la función - para todo el "pedazo" , la altura que corresponde al punto extremo derecho; se tiene la figura:

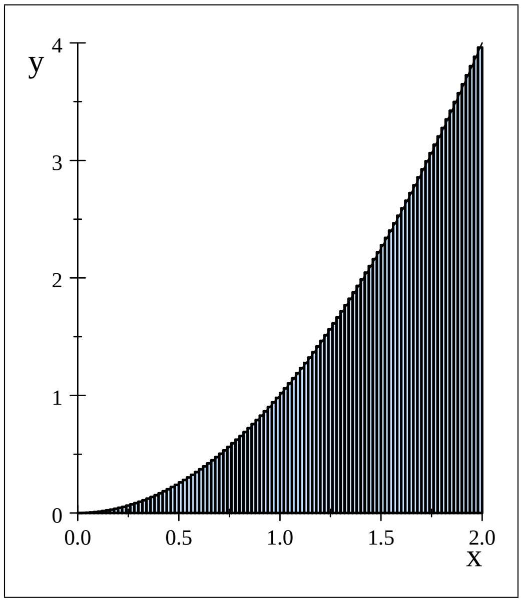
$y = x^2$



Para el caso del *punto medio* pero con $n = 50$;setiene
$y = x^2$



Para $n = 100$
$y = x^2$



Como se puede observar, cada *elemento de área* se puede aproximar -para el cálculo de su área- por un rectángulo reemplazando las alturas variables por una altura constante. El error que se comete al suponer altura constante va disminuyendo a medida que la base del elemento de área es cada vez más estrecha.

0.1 DEFINICION DE INTEGRAL.- SUMAS DE RIEMANN

Si $f(x)$ es una función definida en $[a, b]$, para el cálculo del número que se denominará *la integral de f sobre* $[a, b]$ se procede de la siguiente manera:

1. Se divide o particiona el intervalo $[a, b]$ en n partes, mediante los puntos $\{a = x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n = b\}$de longitudes $\Delta x_1,\ \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ respectivamente.

2. En cada pedazo de la partición se elige un punto cualquiera: x_1^* , x_2^*, ... x_n^* .Generalmente se usan los criterios del i) *punto medio* , ii) *punto extremo izquierdo* y iii) *punto extremo derecho*

3. Se evalúa la función $f(x)$ en cada uno de los puntos; y se suman dichos valores pero con una ponderación igual a la longitud del pedazo: Δx_i

$$S_n = f(x_1^*)\,\Delta x_1 + f(x_2^*)\,\Delta x_2 ... + f(x_n^*)\,\Delta x_n \tag{1}$$

Dicha suma S_n se denomina Suma de Riemann.

4. Al límite de S_n , si existe, cuando el número de subdivisiones aumenta (es decir, $n \to \infty$) y las longitudes de los pedazos son todos cada vez más pequeños (es decir, max $\Delta x_i \to 0$); entonces a tal límite o valor al que se van aproximando o son iguales las sumas de Riemann se llama *integral de $f(x)$ sobre* $[a, b]$ y se representa por

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

es decir,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_i \to 0}} \left(f(x_1^*)\,\Delta x_1 + f(x_2^*)\,\Delta x_2 + ... + f(x_n^*)\,\Delta x_n \right) \qquad (2)$$

Esta denotación simbólica, procede de

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{i=n} f(x_i^*)\,\Delta x_i \quad ; \quad S_\infty = \sum_{i=1}^{i=\infty} f(x_i^*)\,\Delta x_i \quad = \int_a^b f(x)\,dx$$

5. Se demuestra que los cálculos laboriosos de sumas ponderadas se reducen a realizar una diferencia:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx &= F(b) - F(a) \\ \text{donde } F'(x) &= f(x) \end{aligned}$$

El resultado anterior se puede mostrar de la siguiente forma:

1. Sabiendo que existe una función $F(x)$, tal que $F'(x) = f(x)$, entonces

$$\begin{aligned} F(x_1) - F(a) &\approx F'(a)\Delta x_1 = f(a)\Delta x_0 \\ F(x_2) - F(x_1) &\approx F'(x_1)\Delta x_1 = f(x_1)\Delta x_1 \\ &\quad .... \\ F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) &\approx F'(x_{n-1})\Delta x_{n-1} = f(x_{n-2})\Delta x_{n-2} \\ F(b) - F(x_{n-1}) &= F(x_n) - F(x_{n-1}) \approx F'(x_{n-1})\Delta x_{n-1} = f(x_{n-1})\Delta x_{n-1} \end{aligned}$$

Sumando miembro a miembro, se tiene $F(b)-F(a) \approx f(a)\Delta x_0 + f(x_1)\Delta x_1 + ... + f(x_{n-2})\Delta x_{n-2} + f(x_{n-1})\Delta x_{n-1}$; que es la suma de Riemann correspondiente al extremo izquierdo. Amedida que Δx_i se aproxima a 0; se tiene

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx &= F(b) - F(a) \\ \text{donde } F'(x) &= f(x) \end{aligned}$$

En un contexto físico, se puede interpretar a $F(x)$ como la función que da la posición de una partícula en el instante x. Entonces $F'(x) = f(x)$ da la velocidad de ese movimiento.

Luego $F(b) - F(a)$, significa el desplazamiento total durante el intervalo de tiempo desde a hasta b. Mientras que $f(a)\Delta x_0 + f(x_1)\Delta x_1 + ... + f(x_{n-2})\Delta x_{n-2} + f(x_{n-1})\Delta x_{n-1}$ da la suma de desplazamientos parciales (aproximadamente) correspondientes a los intervalos de tiempo: $[a, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ... , $[x_{n-2}, x_{n-1}]$, $[x_{n-1}, b]$; suma que -a medida los intervalos de tiempo en que se observa los desplazamientos parciales son cada vez más cortos- se aproxima al desplazamiento total.

2. Se puede observar que

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx$$

define una función que da el área "bajo la curva" o gráfica de $y = f(x)$ e "inferiormente" limitada por el eje x.De dpnde

$$\begin{aligned}
F(x + \Delta x) - F(x) &= \int_a^{x+\Delta x} f(x)dx - \int_a^x f(x)dx = \int_x^{x+\Delta x} f(x)dx \\
F(x + \Delta x) - F(x) &= \int_x^{x+\Delta x} f(x)dx \approx f(x)\Delta x \\
\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} &\approx f(x) \\
\text{a medida que } \Delta x &\to 0 \text{ , se tiene } F'(x) = f(x)
\end{aligned}$$

Si $F^*(x)$ es cualquier función tal que su derivada es $f(x)$, se tiene que $F(x)$ anteriormente definido difirere de $F^*(x)$ *en*una constante: entonces $F(x) = F^*(x) + c$

Como se ha mostrado que

$$F(b) = \int_a^b f(x)\, dx$$

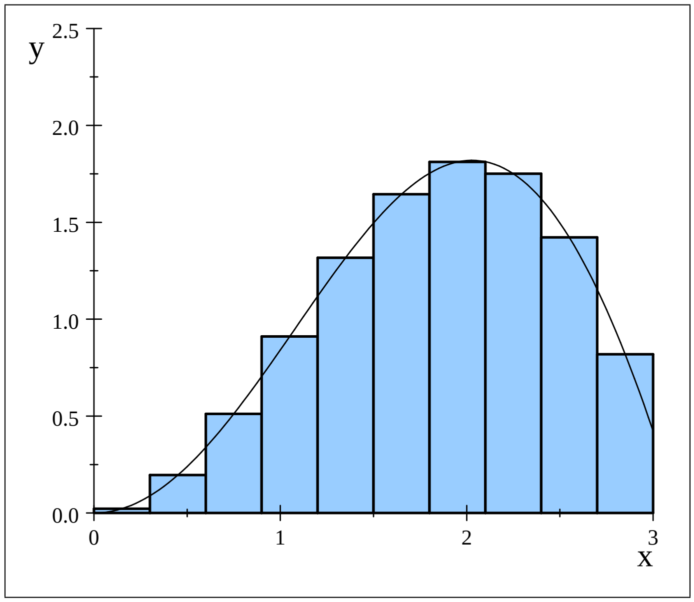
entonces

$$\begin{aligned}
F^*(b) + c &= \int_a^b f(x)\, dx \\
F^*(a) + c &= \int_a^a f(x)\, dx = 0 \\
c &= -F^*(a) \\
F^*(b) - F^*(a) &= \int_a^b f(x)\, dx
\end{aligned}$$

siendo $F^*(x)$ cualquier función cuya derivada es $f(x)$.Esta relación se conoce como *Teorema Fundamental del Cálculo I.*

0.1.1 Comentario:

Si $y = f(x)$ representa la temperatura en el intervalo de tiempo $[0, 3]$



y se desea calcular la temperatura media en dicho intervalo de tiempo.

Si se tuviese únicamente un número finito de temperaturas observadas, la temperatura media se obtendría mediante *la suma de dichas temperaturas dividida entre el número de observaciones.*

Para el caso presentado, el número de observaciones es "infinito" , por lo que el concepto de temperatura media indicado anteriormente debemos "generalizar".

Justamente esa generalización corresponde en esencia al concepto de integral :

1. Se divide el intervalo de tiempo $[0,3]$ en n partes, mediante los puntos $\{a=0, x_2, ..., x_{n-1}, x_n = 3\}$de longitudes de tiempo $\Delta x_1,\ \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ respectivamente.

2. En cada intervalo de tiempo "corto"se elige un punto cualquiera: x_1^* , x_2^*, ... x_n^* .- digamos extremo izquierdo - denominado criterio *del extremo izquierdo.*

3. Se evalúa la función $f(x)$ en cada uno de los tiempos elegidos; y se suman dichos valores pero con una ponderación igual a la longitud del pedazo: Δx_i

$$S_n = f\left(x_1^*\right)\Delta x_1 + f\left(x_2^*\right)\Delta x_2 ... + f\left(x_n^*\right)\Delta x_n \tag{3}$$

Esta S_n, si la dividimos entre el tiempo observado:

$$\frac{S_n}{3}$$

representa la temperatura media de una temperatura observada en tiempo contínuo aproximada por otra observada en tiempo discreto. Los tiempos cortos son adecuados para la aproximación pues en tales tiempos la temperatura es aproximadamente constante. La ponderación es una generalización natural de la frecuencia o veces observada una misma temperatura.

De donde la temperatura media pedida se calcula por

$$\frac{\displaystyle\int_0^3 f\,(x)\,dx}{3} = \frac{\displaystyle\int_0^3 f\,(x)\,dx}{\displaystyle\int_0^3 dx}$$

0.2 TEORIA DE LA INTEGRAL

(Capítulo 13 del libro CALCULUS de Michael Spivak)

Ejercicios:

1. Dado un intervalo $[a,b]$, qué es una partición de $[a,b]$.
2. Cómo se define $L(f,P)$? o suma inferior de f para la partición P.
3. Dado $f(x) = x(5-x)$, calcular $L(f,P)$ para la partición $P = \{0,1,2,3,4,5\}$
4. Definir $U(f,P)$ y calcular $U(f,P)$ para la partición $P = \{0,1,2,3,4,5\}$ para la función dada anteriormente.
5. Cuándo se dice que una función es integrable?.
6. Estudiar la demostración del Teorema 2 de la página 328 del libro de Spivak.
7. Estudiar la demostración de que $f(x) = x$ es integrable en el intervalo $[a,b]$.
8. Estudiar la demostración dada para el Teorema 4 de la página 339 del libro de Spivak.

1 INTEGRALES DOBLES

Vamos a definir la integral de una función $f : R^2 \to R$ de dos variables sobre una región rectangular del plano. Inicialmente, consideremos una función:

$$f : [a,b] \times [c,d] \to R$$

donde $[a,b] \times [c,d]$ es un rectángulo en el plano R^2 .

Para determinar la integral de f sobre el rectángulo $[a,b] \times [c,d]$, se procede de manera semejante al caso de una variable:

1. Se divide o particiona el intervalo $[a, b]$ en n "pedazos" y también el intervalo $[c, d]$ se divide en m pedazos. Ambas particiones determina una partición del rectángulo $[a, b] \times [c, d]$, en $n \times m$ pedazos o rectángulos.

2. De cada pedazo elijamos arbitrariamente un punto (x_i, y_j) , podemos elegirlos con el criterio del punto medio. Nótese que exactamente se tienen $n \times m$ rectángulos. En el gráfico $n = 5$, $m = 2$

3. Se evalua la función $f(x, y)$ en cada punto y se suman dichos valores; pero con *ponderación igual al área del pedazo* del cual se ha elegido (x_i, y_j) *realizando las sumas por columnas* o por filas

$$S_{n,m} = f(x_1, y_1)\,\Delta x_1 \Delta y_1 + f(x_1, y_2)\,\Delta x_1 \Delta y_2 + f(x_2, y_1)\,\Delta x_2 \Delta y_1 + ... + f(x_5, y_2)\,\Delta x_5 \Delta y_2 \tag{4}$$

$$S_{n,m} = \sum_{i=1}^{i=5} (\sum_{j=1}^{j=2} f(x_i, y_j)\,\Delta y_j \Delta x_i) \quad \text{(por columnas)} \tag{5}$$

$$S_{n,m} = \sum_{j=1}^{j=2} (\sum_{i=1}^{i=5} f(x_i, y_j)\,\Delta x_i \Delta y_j) \quad \text{(por filas)} \tag{6}$$

4. A las anteriores expresiones se llaman Sumas de Riemann. Al límite de $S_{n,m}$, si existe, cuando el número de subdivisiones aumenta (es decir, $n \to \infty$, $m \to \infty$) y las longitudes de los pedazos son todos cada vez más pequeños (es decir, $\Delta x_i \to 0$, $\Delta y_j \to 0$); entonces a tal límite o valor al que se van aproximando o son iguales las sumas de Riemann se llama *integral doble de*

$f(x,y)$ *sobre el rectángulo* $[a,b]\times[c,d]$;y se representa por

$$\int\int_A f(x,y)\,dydx \text{ ó } \int\int_A f(x,y)\,dxdy$$

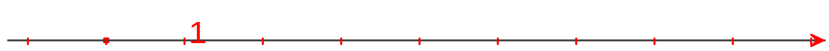
5. Se demuestra que los cálculos laboriosos de sumas ponderadas se reducen a realizar dos diferencias, que equivale a aplicar dos veces el Teorema Fundamental del Cálculo I:

$$\begin{aligned}\int\int_A f(x,y)\,dxdy &= \int\limits_{x=1}^{x=6}(\int\limits_{y=2}^{y=4} f(x,y)\,dy)dx.\text{(por columnas)}\\ &\int\limits_{y=2}^{y=4}(\int\limits_{x=1}^{x=6} f(x,y)\,dx)dy \quad .\text{(por filas)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\int\limits_{y=2}^{y=4} f(x,y)\,dy) &= F(x,4)-F(x,2)=g(x) \quad ;\text{ donde } \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=f(x,y)\\ \int\limits_{x=1}^{x=6} g(x)dx &= G(6)-G(1) \quad ;\text{ donde } G'(x)=g(x)\end{aligned}$$

1.1 INTEGRALES DOBLES PARA REGIONES MAS GENERALES

Cuando la región de integración A no es un rectángulo, se procede de la siguiente forma



1. Se inscribe la región dentro de un rectángulo de la forma $[a,b]\times[c,d]$ .Se divide o particiona $[a,b]$ en n pedazos y el intevalo $[c,d]$ en m pedazos. Tomando ambas particiones se divide el rectángulo circunscrito en $n\times m$ rectángulos

2. Se procede como en al caso anterior donde la región es un rectángulo: i) si el punto (x_i, y_j) seleccionado en un *pedazo pertenece al pedazo* se evalua $f(x_i, y_j)\,\Delta x_i \Delta y_j$. ii) si el punto (x_i, y_j) seleccionado en un *pedazo no pertenece al pedazo* se evalua $0 \times \Delta x_i \Delta y_j$.

3. De la misma manera se obtienen las Sumas de Riemann. Al límite de $S_{n,m}$, si existe, cuando el número de subdivisiones aumenta (es decir, $n \to \infty$, $m \to \infty$) y las longitudes de los pedazos son todos cada vez más pequeños (es decir, $\Delta x_i \to 0$, $\Delta y_j \to 0$); entonces a tal límite o valor al que se van aproximando o son iguales las sumas de Riemann se llama *integral doble de* $f(x, y)$ *sobre* la región y se representa por

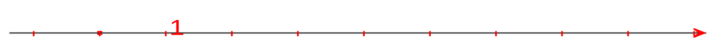
$$\int\int_A f(x,y)\,dydx \text{ ó } \int\int_A f(x,y)\,dxdy$$

5. Se demuestra que los cálculos laboriosos de sumas ponderadas se reducen a realizar dos diferencias:

$$\begin{aligned}\int\int_A f(x,y)\,dxdy \quad &= \int_{x=a}^{x=b} \Big(\int_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \Big) dx. \text{(por columnas)} \\ &\int_{y=c}^{y=d} \Big(\int_{x=\phi_1(y)}^{x=\phi_2(y)} f(x,y)\,dx \Big) dy \quad .\text{(por filas)}\end{aligned}$$

donde: i) $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ son respectivamente la curva inferior y curva superior que limitan la región A.Y el intervalo $[a, b]$ es la proyección de la región A sobre el eje X.

ii) $x = \phi_1(y)$, y $x = \phi_2(y)$ son respectivamente la curva izquierda y curva derecha que limitan la región A.Y el intervalo $[c, d]$ es la proyección de la región A sobre el eje Y.



1.2 DEL SIGNIFICADO DEL VALOR DE LA INTEGRAL

La integral simple es una suma de valores de la función ponderada mediante las longitudes de los pedazos en que se divide el intervalo de integración

La integral doble es una suma de valores de la función ponderada mediante los áreas de los pedazos en que se divide la región de integración.

El significado del valor de una integral está dado por el significado del integrando $f(x)$ o integrando $f(x, y)$.

El método de la aplicación de la integral es el siguiente:

1. Se tiene un objeto del cual se quiere medir alguna magnitud.

2. La magnitud a medir puede obtenerse midiendo las magnitudes que corresponden a una división del objeto y obtener - sumando dichos valores - el valor de la magnitud correspondiente a todo el objeto.

3. Al medir la magnitud en cada pedazo se observa que algunos parámetros o variables que intervienen en la medición pueden considerarse constantes, lo que permite calcular de manera "simple" la magnitud.

4. El error cometido por la consideración de que ciertas variables se pueden considerar constantes disminuye a medida que los pedazos definidos se hacen cada vez más pequeños.

1.3 Cálculo de las integrales dobles

El cálculo de las integrales dobles de casi todas las funciones que tratamos se reduce, afortunadamente, al cálculo consecutivo o iterado de dos integrales simples que, como sabemos, a su vez se calculan fácilmente por medio del Teorema Fundamental del Cálculo. El teorema que establece la manera en que de una integral doble se pasa a una integral iterada, con toda razón, recibe un nombre que señala su importancia.

Teorema Fundamental de las Integrales Dobles

Si $f(x, y)$ es integrable sobre una región plana A, y:

a) La región A es limitada inferiormente por las curvas $y = y_1(x)$ y superiormente por $y = y_2(x)$. Entonces

$$\int\int_A f(x, y)\, dA = \int_{x=a}^{x=b} \left(\int_{y=y_1}^{y=y_2} f(x, y)\, dy \right) dx = \int_a^b \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy dx \tag{7}$$

donde el intervalo $[a, b]$ es la proyección de A sobre el eje x (Figura).

b) Si la región A es limitada por la izquierda por la curva $x = x_1(y)$ y por la derecha por $x = x_2(y)$. Entonces

$$\int\int_A f(x, y)\, dA = \int_{y=c}^{y=d} \left(\int_{x=x_1}^{x=x_2} f(x, y)\, dx \right) dy = \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\, dx dy \tag{8}$$

donde el intervalo $[c, d]$ es la proyección de A sobre el eje y (Figura). Por supuesto, las integrales simples deben existir.

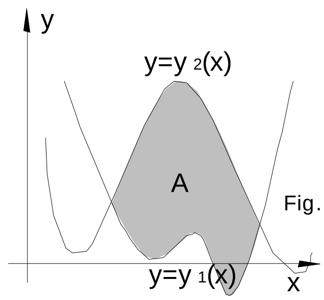


Fig. 6.4a

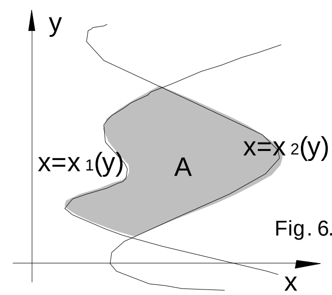


Fig. 6.4b

En (5) al realizar la primera integración con respecto de y la variable x se mantiene constante; mientras que en (6) al realizar la integración con respecto de x la variable y se mantiene constante.

En la práctica, la elección del orden de integración depende de la curva que limita a la región de integración A. Es preferible que las curvas o funciones que limitan a la región A ya sea superior e inferiormente, o ya sea por la izquierda o por la derecha están dadas por una sola ecuación cada una. Si no fuera así, entonces se puede descomponer A en regiones $A_1, A_2, ...$ limitadas en la forma deseada y la integral sobre A se obtiene tomando la suma de las respectivas integrales dobles sobre A_1, A_2, ...

1. TEOREMAS SOBRE INTEGRALES.

2. Estudiar la demostración del Lema 1.1 de la página 408 del texto de Serge Lang (introducción al Análisis Martemático)

3. Mostrar que una función es integrable en R , si y solo sí, dado $\varepsilon > 0$, existe una partición P de R tal que
$$|U(f,P) - L(f,P)| < \varepsilon$$

4. A que se denomina *conjunto despreciable* en R^2?. A qué se denomina función (definida en un rectángulo) admisible?.

5. Explicar en sus propias palabras el Teorema 3.1 de la página 421 del texto de Serge Lang. e ilustrar con un ejemplo.

6. Estudiar el ejercicio 1 de la págian 423 del texto de Sege Lang. *Qué es lo muestra este ejercicio ?*