SEMESTRE II/2018
ANALISIS II
UNIDAD 1
1.2 MÉTRICAS Y NORMAS . EQUIVALENCIA
PRACTICA # 2 (3 de Septiembre de 2018)

1. Si A es un conjunto cualquiera. Sea $d_0 : A \times A \to R$, definida por

$$\begin{aligned} d_0(x,y) &= 1 \quad x \neq y \\ &= 0 \quad \text{si} \quad x = y \end{aligned}$$

   Mostrar que d_0 es un métrica en A. Esta métrica se denomina métrica *trivial*.

2. Si $A = R^2$, representar gráficamente: a) $B((0,0),1)$, b) $\overline{B}((0,0),1)$ empleando la métrica anterior. c) Determinar los puntos de acumulación de $\left\{(x,y) \in R^2 \mid x > 0 \text{ y } y > 0\right\}$.

3. Mostrar que la función d_2 definida en $R^2 \times R^2$ como

$$\begin{aligned} d_2 &: R^2 \times R^2 \to R \\ d_2(x,y) &= (\sum_i |x_i - y_i|^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

   es una métrica en R^2.Esta métrica se denomina métrica *euclidiana* , o métrica 2.

4. Representar gráficamente: a) $B((0,0),1)$, b) $\overline{B}((0,0),1)$ empleando la métrica anterior. c) Determinar los puntos de acumulación de $\left\{(x,y) \in R^2 \mid x > 0 \text{ y } y > 0\right\}$.

5. Mostrar que la función d_1 definida en $R^2 \times R^2$ como

$$\begin{aligned} d_1 &: R^2 \times R^2 \to R \\ d_1(x,y) &= \sum_i |x_i - y_i| \end{aligned}$$

   es una métrica. Esta métrica se denomina métrica *ciudad bloque* o métrica 1.

6. Representar gráficamente: a) $B((0,0),1)$, b) $\overline{B}((0,0),1)$ empleando la métrica anterior. c) Determinar los puntos de acumulación de $\left\{(x,y) \in R^2 \mid x > 0 \text{ y } y > 0\right\}$

7. Mostrar que la función d_∞ definida en $R^2 \times R^2$ como

$$\begin{aligned} d_\infty &: R^2 \times R^2 \to R \\ d_\infty(x,y) &= \max_i \ \{|x_i - y_i|\} \end{aligned}$$

   es una métrica. Esta métrica se denomina métrica *sup* o métrica ∞.

8. Representar gráficamente: a) $B((0,0),1)$, b) $\overline{B}((0,0),1)$ empleando la métrica anterior. c) Determinar los puntos de acumulación de $\left\{(x,y) \in R^2 \mid x > 0 \text{ y } y > 0\right\}$

9. En R^2 representar gráficamente con las diferentes distancias (d_0 , d_1 , d_2 y d_∞) la circunferencias de centro en $(2,4)$ y de radio : a) 1 ,b) $\frac{1}{2}$.

10. Si d_1 y d_2 son las distancias definidas en R^2, entonces
$$d(x,y) = d_1(x,y) + d_2(x,y)$$
una distancia ? . En caso afirmativo , realizar el gráfico de la circunferencia de radio 1 y centro $(0,4)$ respecto de d .

11. Mostrar que d_0 no es equivalente a d_1.

12. Mostrar que d_1 es equivalente a d_2 . Mostrar que d_2 es equivalente a d_∞

13. Mostrar que la realción de equivalencia entre métricas definidas un espacio métrico es una *relación de equivalencia .*

14. Si $V = R^2$ es el espacio vectorial usual, demostrar que
$$\begin{aligned} \|.\|_2 &: R^2 \to R \\ \|(x_1,x_2)\|_2 &= (\sum_i |x_i|^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$
es un norma en R^2.

15. Idem al ejercicio anterior para a) $\|.\|_1 : R^2 \to R$, donde $\|(x_1,x_2)\|_1 = (\sum_i |x_i|)$. b) $\|.\|_\infty : R^2 \to R$, donde $\|(x_1,x_2)\|_\infty = \sup_i \{|x_i|\}$

16. Siendo Mostrar que la suma de dos normas de un espacio vectorial , es también una norma . Representar gráficamente el conjunto
$$\left\{x \in R^2 \mid \|x\|_1 + \|x\|_\infty = 2\right\}$$

17. Mostrar que la norma N_1 es equivalente a la norma N_2 y también a la norma N_∞.

18. En un espacio vectorial normado E se define la bola abierta con centro en x_0 y radio r al conjunto
$$B(x_0,r) = \{x \in E \mid \|x - x_0\| < r\}$$
Mostrar que si dos normas son *equivalentes* entonces una bola abierta según una norma a) *contiene* una bola abierta según la otra norma . b) está *contenida* en una bola abierta según la otra norma.

19. Mostrar que si en un conjunto o espacio vectorial se tiene métricas o normas equivalentes, las situaciones de a) convergencia de sucesiones. b) límite de funciones y c) continuidad se mantienen invariables.

20. Mostrar que la función *norma* en un espacio vectorial *es una función contínua .*

21. Sea S un subconjunto no vacío de un espacio vectorial normado E y sea $v \in E$. El conjunto de números $|x - v|$ para $x \in E$ está acotado inferiormente por 0. Su *máxima cota inferior* se llama *distancia* de v a S y se la denota por $d(v,S)$.

    Mostrar : a) $d(S,v) = 0$ si , y solo si , v pertenece a S o es punto de acumulación de S. b) La función $v \to d(v,S)$ es una función contínua de E en R