DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

FORMAS Y TENSORES
PRACTICA # 3
PRODUCTO TENSORIAL
(16 Mayo,2018)

G. Cupé

Describiremos un método de unir dos espacios vectoriales para construir un tercer espacio vectorial, denominado su *producto tensorial.*

Si denotamos por P el conjunto de todos los polinomios a una variables x y de grado menor o igual a n; y por Q el conjunto de polinomios en otra variables y de grado menor o igual a m

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n \\ q(y) = \quad & b_0 + b_1y + b_2y^2 + ... + b_my^m \end{aligned}$$

y se W el conjunto de todos los polinomios en dos variables x , y ; y de grado menor o igual a $n+m$

$$r(x, y) = c_{00} + c_{10}x + c_{01}y + c_{20}x^2 + c_{02}y^2 + c_{11}xy + ... + c_{nm}x^ny^m$$

que se obtiene mediante el usual *producto de polinomios (haciendo la completación correspondiente):* donde

$$r(x, y) = p(x)q(y)$$

1. Mostrar que P es un espacio vectorial de dimensión $n+1$, que Q es de dimensión $m+1$; y que W tiene dimensión $(n+1)(m+1)$

2. En el ejemplo anterior de los polinomios hemos considerado espacios vectoriales cuyos elementos son `funciones.` En ese sentido se puede considerar el espacio vectorial R^n como una colección de funciones de la siguiente manera:

   EL PRODUCTO TENSORIAL $\quad R^n \otimes R^n$

   El vector x de coordenadas $(x_1, x_2, ..., x_n)$ - en base usual como caso particular - se puede considerar como una función x definida en el conjunto $\{1, 2, 3, ..., n\}$ en los números reales, tal que

   $$x(1) = x_1 \ , \ x(2) = x_2 \ , \ ....., \ x(n) = x_n$$

   Para los elementos de la base usual de R^n se tiene

   $$\begin{aligned} e_i(j) &= 1 \ ; \ \ i = j \\ &= 0 \quad ; \ i \neq j \end{aligned}$$

Si tomamos dos elementos de R^n: x , y ; considerándolos como funciones indicado anteriormente, se define el `producto tensorial` $x \otimes y$, como

$$x \otimes y(i,j) = x(i)y(j)$$

$x \otimes y$ tiene como dominio $\{1,2,...,n\} \times \{1,2,...,n\}$.

Mostrar que $R^n \otimes R^n = \{x \otimes y \mid x \in R^n \quad , \quad y \in R^n\}$, denominado `espacio producto tensorial` de R^n por R^n es un espacio vectorial de dimensión n^2..

Nota.- Mostrar que los productos tensoriales $e_i \otimes e_j$, $i = 1,2,.......,n$, $j = 1,2,.........,n$, son una bse de $R^n \otimes R^n$.

3. Se puede mostrar en una tabla, para el caso $n = 3$, si $x = (x^1, x^2, x^3)$, $y = (y^1, y^2, y^3)$ en base $\{e_i\}$ y donde $x \otimes y = x^i y^j e_i \otimes e_j$

(a)

$x \otimes y$	y^1	y^2	y^3
x^1	x^1y^1	x^1y^2	x^1y^3
x^2	x^2y^1	x^2y^2	x^2y^3
x^3	x^3y^1	x^3y^2	x^3y^3

Es decir, el tensor $x \otimes y$ se puede escribir como una matriz 3×3. Se puede decir que la suma de tensores (o vectores en $R^3 \otimes R^3$) se realiza o equivale a una suma de matrices 3×3?. A qué equivale la multiplicación por un escalar ?

4. Considerando $R^n \otimes R^n$ y R^n como espacios vectoriales, se puede construir el `producto tensorial` $(R^n \otimes R^n) \otimes R^n$ [o $R^n \otimes (R^n \otimes R^n)$] ; Y demostrar que ambos son iguales; es decir, el producto tensorial de 3 espacios es *asociativo.* por lo anterior, se escribe simplemenete $R^n \otimes R^n \otimes R^n$.

De qué "forma matricial" se puede escribir el tensor $x \otimes y \otimes z$ de $R^3 \otimes R^3 \otimes R^3$? . Y cómo debería realizarse la suma de dos tensores de $R^3 \otimes R^3 \otimes R^3$?

5. Mostrar o refutar si los productos tensoriales $x \otimes y$, $y \otimes x$ son iguales.

6. Si $\{e_i\}$ es la base canónica de R^n y $\{\overline{e}_j\}$ es otra base cualquiera de R^n , se define

$$\begin{aligned} \overline{e}_j(k) &= (a_1e_1 + a_2e_2 + ... + a_ne_n)(k) \\ &= a_1e_1(k) + a_2e_2(k) + ... + a_ne_n(k) \end{aligned}$$

ya que $\overline{e}_j = a_1e_1 + a_2e_2 + ... + a_ne_n$,se debe mirar como una combinación "lineal" de las funciones e_i

Mostrar que siendo $B = \{\overline{e}_p\}$ cualquier otra base de R^n, $x = \overline{x}^p \overline{e}_p$, $y = \overline{y}^q \overline{e}_q$ (escritos en notación de Einstein); entonces

$$\begin{aligned} x \otimes y &= (x^i e_i) \otimes (y^j e_j) = x^i y^j (e_i \otimes e_j) \\ &= (\overline{x}^p \overline{e}_p) \otimes (\overline{y}^j \overline{e}_q) = \overline{x}^p \overline{y}^q (\overline{e}_p \otimes \overline{e}_q) \quad (*) \end{aligned}$$

donde $x \otimes y$, está dado en dos bases diferentes

Mostrar que si

$$\begin{aligned} e_i &= \overline{A}_i^p \overline{e}_p \quad ; \quad \overline{e}_p = A_p^i e_i \;\; ; \\ & \quad \text{entonces} \\ \overline{x}^p \overline{y}^q &= \overline{A}_i^p \overline{A}_j^q x^i y^j \quad (**) \\ \overline{T}^{pq} &= \overline{A}_i^p \overline{A}_j^q T^{ij} \quad (\text{haciendo } \overline{T}^{pq} = \overline{x}^p \overline{y}^q \text{ y } T^{ij} = x^i y^j)\ (**) \end{aligned}$$

$(**)$ es la fórmula del cambio de base.

Para el caso $x = 2e_1 + 3e_2$, $y = 4e_1 - e_2$; donde $B = \{e_1 = (1,0)\ ,\ e_2 = (0,1)\}$; y $\overline{B} = \{\overline{e}_1 = (-1,1)\ ,\ \overline{e}_2 = (0,2)\}$, determinar las componentes del tensor $x \otimes y$ en la base $\{\overline{e}_p \otimes \overline{e}_q\}$. i) Directamente , -empleando - $(*)$. ii) Empleando el cambio de base $(**)$. En este caso, notar que $(**)$ se puede escribir como

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \overline{x}^1 \\ \overline{x}^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \overline{A}_1^1 & \overline{A}_1^2 \\ \overline{A}_2^1 & \overline{A}_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \overline{y}^1 & \overline{y}^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} y^1 & y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{A}_1^1 & \overline{A}_2^1 \\ \overline{A}_1^2 & \overline{A}_2^2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \overline{x}^1\overline{y}^1 & \overline{x}^1\overline{y}^2 \\ \overline{x}^2\overline{y}^1 & \overline{x}^2\overline{y}^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \overline{x}^1 & \overline{x}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{A}_1^1 & \overline{A}_2^1 \\ \overline{A}_1^2 & \overline{A}_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{A}_1^1 & \overline{A}_1^2 \\ \overline{A}_2^1 & \overline{A}_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

EL PRODUCTO TENSORIAL $(R^n)^* \otimes (R^n)^*$

Si se considera el espacio dual $(R^n)^*$ de R^n constituído por el espacio vectoriales de los funcionales definidos en R^n, una base (usual) es la `base dual` $\{\chi^p\}$ correspondiente a (e_i)

$$\begin{aligned} \chi^p(e_i) &= 1 \quad \text{si} \quad p = i \\ &= 0 \quad \text{si} \quad p \neq i \end{aligned}$$

Si consideramos cada funcional y^* como una función de $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, según la regla: si $y^* = y_1^*\chi^1 + ... + y_n^*\chi^n$, entonces $y^*(e_1) = y_1^*$, , $y^*(e_n) = y_n^*$.

Se define el `producto tensorial` $y^* \otimes z^*$ en $(R^n)^* \otimes (R^n)^*$, como

$$y^* \otimes z^*(e_i, e_j) = y^*(e_i) z^*(e_j)$$

7. Mostrar que $\{y^* \otimes z^* \mid y^*\ ,\ z^* \in (R^n)^*\}$ es un espacio vectorial de dimensión n^2.

8. Determinar las ecuaciones de cambio de base en el espacio tensorial $(R^n)^* \otimes (R^n)^*$

9. Cuál sería la suma "matricial" de dos elementos de $(R^n)^* \ \otimes (R^n)^*$?

EL PRODUCTO TENSORIAL $\quad R^n \otimes (R^n)^*$

A partir de las definiciones anteriores, cómo se deberían definir

$$R^n \otimes (R^n)^*$$

10. Cuál sería la dimensión y una base del espacio vectorial $R^n \otimes (R^n)^*$.

11. Si los elementos de R^n y $(R^n)^*$ $\ x$, y escribimos, respectivamente en la forma

$$x = x^i e_i \qquad y^* = y_j \chi^j$$

entonces los productos tensoriales de dos vectores tendrían respectivamente las componentes

$$\begin{array}{lllll} x^i y^j & ; & \text{en} \quad R^n \ \otimes R^n & ; & \text{en base} \quad e_i \otimes e_j \\ x_i^* y_j^* & ; & \text{en} \quad (R^n)^* \ \otimes (R^n)^* & ; & \text{en base} \quad \chi^i \otimes \chi^j \\ x^i y_j^* & ; & \text{en} \quad R^n \ \otimes (R^n)^* & ; & \text{en base} \quad e_i \otimes \chi^j \end{array}$$

escribir las fórmulas correspondientes a los cambios de base para cada caso.

12. Si las expresiones $x^i y^j$, $\ x^i y_j$, $x_i y_j$, que son números; se les simboliza respectivamente de la forma T^{ij}, T^i_j , T_{ij} ; entonces mostrar que las ecuaciones de cambio de base son :

$$\begin{array}{lrcl} (a) & \overline{T}^{pq} & = & \overline{A}^p_i \overline{A}^q_j T^{ij} \\ (b) & \overline{T}_{pq} & = & A^i_p A^j_q T_{ij} \\ (c) & \overline{T}^p_q & = & \overline{A}^p_i A^j_q T^i_j \end{array}$$

Los conjuntos de números T^{ij} , T^i_j , T_{ij} se denominan componentes de un tensor contravariante de orden 2 , tensor mixto una vez contravariante y otra covariante; y tensor covariante de orden 2, respectivamente. Esto se define, en base a la forma de cambiar dichos números cuando se realiza un cambio de base.

Verificar estas fórmulas para el caso de **a)** R^2 , $x = (1,1)$, $y = (2,0)$ dado en base usual y la nueva base es $\{\overrightarrow{e}_j\}$ igual a $\{\overrightarrow{e}_1 = e_1 - e_2 \ , \ \overrightarrow{e}_2 = 2e_1 + e_2\}$.**b)** $x^* = (1,1)$, $y^* = (2,0)$ y tome las bases duales de las bases del inciso anterior. **c)** $x = (1,1)$, $y^* = (2,0)$. Donde las bases son las indicadas en el inciso a) , (b) o sus duales.