FORMAS Y TENSORES
UNIDAD 1:

0.1 ANEXO A LA UNIDAD 1:

0.2 RELACIÓN ENTRE BASES

Base Antigua: $\{e_i\}$, Base Nueva $\{\overline{e}_j\}$. Y cada elemento de una base se puede escribir en términos de la otra base, a las que se llama *componentes*

$$\overline{e}_j = A^i_j e_i \qquad e_i = \overline{A}^j_i \overline{e}_j$$

Matricialmente (y formalmente)

$$\begin{aligned} \overline{e}_1 &= A^1_1 e_1 + A^2_1 e_2 \quad (1.1) \\ \overline{e}_2 &= A^1_2 e_1 + A^2_2 e_2 \quad (1.2) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} e_1 &= \overline{A}^1_1 \overline{e}_1 + \overline{A}^2_1 \overline{e}_2 \quad (1.3) \\ e_2 &= \overline{A}^1_2 \overline{e}_1 + \overline{A}^2_2 \overline{e}_2 \quad (1.4) \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \overline{e}_1 \\ \overline{e}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A^1_1 & A^2_1 \\ A^1_2 & A^2_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \quad (1.5) \\ \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \overline{A}^1_1 & \overline{A}^2_1 \\ \overline{A}^1_2 & \overline{A}^2_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{e}_1 \\ \overline{e}_2 \end{bmatrix} \quad (1.6) \end{aligned}$$

Denominando

$$A = \begin{bmatrix} A^1_1 & A^2_1 \\ A^1_2 & A^2_2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \overline{A} = \begin{bmatrix} \overline{A}^1_1 & \overline{A}^2_1 \\ \overline{A}^1_2 & \overline{A}^2_2 \end{bmatrix}$$

Mostrar que

$$\overline{A} = A^{-1}$$

(Sug: reemplazar $\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$ dado en (1.6) en el segundo miembro de (1.5) ; o reemplazar los segundos miembros de (1.3) y (1.4) en (1.1) y (1.2))

0.3 RELACION ENTRE COMPONENTES POR CAMBIO DE BASE

Dado el vector x , se puede determinar sus componentes tanto en la base antigua como nueva

$$\begin{aligned} x &= x^i e_i = x^1 e_1 + x^2 e_2 \qquad (1.7) \\ x &= \overline{x}^j \overline{e}_j = \overline{x}^1 \overline{e}_1 + \overline{x}^2 \overline{e}_2 \quad (1.8) \end{aligned}$$

Que matricialmente y formalmente se puede escribir

$$\begin{aligned} x &= \begin{bmatrix} e_1 & e_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} \quad (1.9) \\ x &= \begin{bmatrix} \overline{e}_1 & \overline{e}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{x}^1 \\ \overline{x}^2 \end{bmatrix} \quad (1.10) \end{aligned}$$

o

$$\begin{bmatrix} \overline{x}^1 & \overline{x}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{e}_1 \\ \overline{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^1 & x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

reemplazando en (1.11) lo indicado en (1.6)

$$\begin{bmatrix} \overline{x}^1 & \overline{x}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{e}_1 \\ \overline{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^1 & x^2 \end{bmatrix} \overline{A} \begin{bmatrix} \overline{e}_1 \\ \overline{e}_2 \end{bmatrix}$$

de donde

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \overline{x}^1 & \overline{x}^2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x^1 & x^2 \end{bmatrix} \overline{A} \\ \begin{bmatrix} \overline{x}^1 \\ \overline{x}^2 \end{bmatrix} &= \overline{A}^T \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} = (A^{-1})^T \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} \\ \overline{x} &= (A^{-1})^T x \ \ ; \quad \overline{x}^j = \overline{A}_i^j x^i \\ x &= A^T \overline{x} \end{aligned}$$

0.4 RELACION ENTRE BASES DUALES

La base dual $\{X^i\}$ en V^* correspondiente a la base $\{e_i\}$ en V, está definida por

$$\begin{aligned} X^1(e_1) &= 1 \ , \ X^1(e_2) = 0 \ , ..., \ X^1(e_n) = 0 \\ X^2(e_1) &= 0 \ , \ X^2(e_2) = 1 \ , ..., \ X^2(e_n) = 0 \\ &.............. \\ X^n(e_1) &= 0 \ , \ X^n(e_2) = 0 \ , ..., \ X^n(e_n) = 1 \end{aligned}$$

en resumen

$$\begin{aligned} X^i(e_p) &= \delta_p^i = 1 \ , \ \text{si} \ \ i = p \\ &= \quad\quad 0 \ , \ \text{si} \ \ i \neq p \end{aligned}$$

De manera similar se define la base dual $\left\{\overline{X}^j\right\}$ en V^* correspondiente a la base $\{\overline{e}_j\}$ en V

$$\begin{aligned} \overline{X}^j(\overline{e}_q) &= \delta_q^j = 1 \ , \ \text{si} \ \ j = q \\ &= \quad\quad 0 \ , \ \text{si} \ \ j \neq q \end{aligned}$$

Queda como ejercicio que $\{X^i\}$es base de V^*.

Se tiene en V^* , Base Antigua: $\{X^i\}$, Base Nueva $\left\{\overline{X}^j\right\}$. Y cada elemento de una base se puede escribir en términos de la otra base, a las que se llama *componentes*

$$\overline{X}^j = \alpha_i^j X^i \qquad X^i = \overline{\alpha}_j^i \overline{X}^j$$

qure matricialmente, para el caso $n = 2$, se puede escribir

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \overline{X}^1 \\ \overline{X}^2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^1 \\ X^2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} X^1 \\ X^2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \overline{\alpha}_1^1 & \overline{\alpha}_2^1 \\ \overline{\alpha}_1^2 & \overline{\alpha}_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{X}^1 \\ \overline{X}^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En las relaciones

$$\begin{aligned} \overline{X}^1 &= \alpha_1^1 X^1 + \alpha_2^1 X^2 \\ \overline{X}^2 &= \alpha_1^2 X^1 + \alpha_2^2 X^2 \end{aligned}$$

aplicamos dichas relaciones en $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$

$$\begin{aligned}
\overline{X}^1(\overline{e}_1) &= (\alpha^1_1 X^1 + \alpha^1_2 X^2)(\overline{e}_1) = (\alpha^1_1 X^1 + \alpha^1_2 X^2)(A^1_1 e_1 + A^2_1 e_2) \\
\overline{X}^1(\overline{e}_2) &= (\alpha^1_1 X^1 + \alpha^1_2 X^2)(\overline{e}_2) = (\alpha^1_1 X^1 + \alpha^1_2 X^2)(A^1_2 e_1 + A^2_2 e_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{X}^2(\overline{e}_1) &= (\alpha^2_1 X^1 + \alpha^2_2 X^2)(\overline{e}_1) = (\alpha^2_1 X^1 + \alpha^2_2 X^2)(A^1_1 e_1 + A^2_1 e_2) \\
\overline{X}^2(\overline{e}_2) &= (\alpha^2_1 X^1 + \alpha^2_2 X^2)(\overline{e}_2) = (\alpha^2_1 X^1 + \alpha^2_2 X^2)(A^1_2 e_1 + A^2_2 e_2)
\end{aligned}$$

Onteniendo las relaciones

$$\begin{aligned}
1 &= \alpha^1_1 A^1_1 + \alpha^1_2 A^2_1 \\
0 &= \alpha^1_1 A^1_2 + \alpha^1_2 A^2_2 \\
0 &= \alpha^2_1 A^1_1 + \alpha^2_2 A^2_1 \\
1 &= \alpha^2_1 A^1_2 + \alpha^2_2 A^2_2
\end{aligned}$$

lo que se puede escribir

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \alpha^1_1 & \alpha^1_2 \\ \alpha^2_1 & \alpha^2_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^1_1 & A^2_1 \\ A^1_2 & A^2_2 \end{bmatrix}^T &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\alpha A^T &= I \\
\alpha &= (A^{-1})^T \\
\overline{X} &= (A^{-1})^T X \qquad , \qquad X = A^T \overline{X}
\end{aligned}$$

0.5 RELACIONES ENTRE COMPONENTES EN EL ESPACIO DUAL POR CAMBIO DE BASE

Dado el funcional y^* elemento de V^* , se puede escribir en términos de la base antigua $\left\{X^i\right\}$, como de la base nueva $\left\{\overline{X}^j\right\}$

$$\begin{aligned}
y^* &= y^*_1 X^1 + y^*_2 X^2 \\
y^* &= \overline{y}^*_1 \overline{X}^1 + \overline{y}^*_2 \overline{X}^2
\end{aligned}$$

o en términos matriciales

$$\begin{aligned}
y^* &= \begin{bmatrix} \overline{y}^*_1 & \overline{y}^*_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{X}^1 \\ \overline{X}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^*_1 & y^*_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^1 \\ X^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^*_1 & y^*_2 \end{bmatrix} A^T \begin{bmatrix} \overline{X}^1 \\ \overline{X}^2 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \overline{y}^*_1 & \overline{y}^*_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} y^*_1 & y^*_2 \end{bmatrix} A^T \quad \text{o} \qquad \begin{bmatrix} \overline{y}^*_1 \\ \overline{y}^*_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y^*_1 \\ y^*_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

es decir:

$$\overline{y}^*_j = A^i_j y^*_i \quad , \quad y^*_i = \overline{A}^j_i y^*_j$$

0.6 EJERCICIOS

Dadas dos bases , antigua $\{e_i\}$ y base Nueva $\{\overline{e}_j\}$, determinar: a) la relación entre ellas , b) las relaciones de cambio de componentes de una vector de una base a la otra , c) las relaciones entre las bases duales correspondientes, d) las relaciones de cambio de componentes de un funcional de una base dual a la otra.

1. $\{e_i\} = \{(1,0),(0,1)\}$, $\{\overline{e}_j\} = \{(1,1),(-1,1)\}$
2. $\{e_i\} = \{(1,1),(-1,1)\}$, $\{\overline{e}_j\} = \{(0,2),(2,0)\}$
3. $\{e_i\} = \{(4,3),(-2,2)\}$, $\{\overline{e}_j\} = \{(4,0),(-4,4)\}$
4. $\{e_i\} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, $\{\overline{e}_j\} = \{(1,1,-1),(1,2,2),(-4,4,0)\}$
5. $\{e_i\} = \{(1,1,-1),(1,2,2),(-4,4,0)\}$, $\{\overline{e}_j\} = \{(0,2,2),(2,2,2),(-2,4,8)\}$