DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

FORMAS Y TENSORES
PRACTICA # 6
COORDENADAS CURVILINEAS:
BASES CONTRA Y COVARIANTE , LONGITUD DE ARCO, AREA Y VOLUMEN
GRADIENTE Y DIVERGENCIA
( 14 julio,2016)

G. Cupé

## 0.1 TRANSFORMACION DE COORDENADAS

1. Dadas las bases, escritas en cordenadas usuales, determinar las ecuaciones de transformación de componentes de una base a la otra.

   $B = \{e_1 = (1,1)\ ,\ e_2 = (-1,2)\}\ ,\ \ \overline{B} = \{\overline{e}_1 = (2,0)\ ,\ \overline{e}_2 = (3,3)\}\,.$

2. En relación al ejercicio anterior, determinar la distancia entre los puntos $A = (2,1)$ y $B = (-6,7)$, cuyas coordenadas están en coordenadas cartesianas; empleando

   a) coordenadas cartesianas. b) coordenadas definidas por la base $B$. c) coordendas definidas por las base $\overline{B}$.

3. Para la transformación de coordenadas cartesianas - polares

$$x = \rho\cos\theta \quad ; \quad y = \rho\sin\theta$$
$$\rho = \sqrt{x^2+y^2} \quad ; \quad \theta = \tan^{-1}(\frac{y}{x})$$

   a) Dibujar en el mismo gráfico curvas coordenadas correspondientes a ambos sistemas.

   b) Determinar en cualquier punto la base contravariante y la base covariante en el sistema polar.

   c) Mostrar que la base covariante se puede considerar como la base dual que corresponde a la base contravariante.

4. Estudiar las coordenadas parabólicas enunciadas en el problema 3 de la página 138.

$$x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \quad ; \quad y = uv \quad ; \quad -\infty < u < \infty \ ; \ \ v \geq 0$$

   a) Determinar en cualquier punto la base contravariante y la base covariante en el sistema parabólico.

   b) Determinar la longitud de arco correspondiente a la parábola $v = 2$ , comprendido entre $u = -1$ hasta $u = 2$

c) Determinar el área limitado por las curvas coordenadas $v = 2$ y $u = 3$

d) Es posible determinar las ecuaciones de transformación $u = u(x, y)$ , $v = v(x, y)$

5. Verdadera o falsa la siguiente afirmación: "*El vector posición definido en cada punto del plano es un tensor contravariante es un tensor contravariante de orden uno*". Justifique su afirmación.

6. Mostrar que en vector velocidad definida en cada punto de una partícula en movimiento en el espacio, es un tensor contravariante de orden 1.

7. Realizar el ejercicio 4, de la página 142 , empleando la transformación contravariante.

8. Realizar el ejercicio 6 de la página, respecto solo de la velocidad, considerando el resultado del ejerccio anterior.

9. Estudiar el ejercicio 7 de la página 143; y luego resolverlo utilizando la forma
$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

10. En el espacio unidimensional considere la ecuación de transformación de coordenadas definida por
$$\begin{aligned} x &= u^2 \quad x \geq 0 \quad , \quad u \geq 0 \\ x &= -u^2 \quad x < 0 \quad , \quad u < 0 \end{aligned}$$
calcule la longitud de arco desde $x = 1$ hasta $x = 16$ empleando el sistema $u$.

11. Determine el área de la región de la superficie cilíndrica $x^2 + y^2 = R^2$ limitada entre las alturas $z = 1$ hasta $z = h$. ; empleando coordenadas cilíndricas.