DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

FORMAS Y TENSORES
PRACTICA # 5
COORDENADAS CURVILINEAS
BASES CONTRA Y COVARIANTE
(17 junio,2016)

G. Cupé

En los espacios afines los desplazamientos se realizan empleando vectores de un espacio vectorial. En los espacios llamados euclidianos es posible desplazarse por todo el espacio afín empleando únicamente los vectores de una base única (por ejemplo en el plano y espacio usual). Sin embargo, en ciertos espacios no es posible lo anterior; esto es, se requiere diferentes bases para desplazarse de un punto a otro.

Por otro lado, en espacios afines eucliadianos, cualquier vector del espacio se expresa en términos de la base. Y si hay dos bases diferentes que se utilizan, se obtienen las relaciones entre las componentes x^i *y las* $\overline{x}^j$ *respectivamente a partir de las relaciones entre las bases:*

$$
\begin{aligned}
x &= x^i e_i \qquad x = \overline{x}^j \overline{e}_j & (1)\\
e_i &= \overline{A}_i^j \overline{e}_j \qquad \overline{e}_j = A_j^i e_i & (2)\\
x^i &= A_j^i \overline{x}^j \qquad \overline{x}^j = \overline{A}_i^j x^i & (3)
\end{aligned}
$$

Recíprocamente, dadas las relaciones entre coordenadas se puede construir las bases que correspondan a dicha transformación de coordenadas.

0.1 TRANSFORMACION DE COORDENADAS NO LINEALES

Si se tiene las trasformaciones

$$
\begin{aligned}
\overline{x}^1 &= \overline{x}^1(x^1, x^2, ..., x^n)\\
&\quad ....\\
\overline{x}^n &= \overline{x}^n(x^1, x^2, ..., x^n)
\end{aligned}
$$

y sus inversas

$$
\begin{aligned}
x^1 &= x^1(\overline{x}^1, \overline{x}^2, ..., \overline{x}^n)\\
&\quad ....\\
x^n &= x^n(\overline{x}^1, \overline{x}^2, ..., \overline{x}^n)
\end{aligned}
$$

los vectores o bases definidas por estas transformaciones - generalizando el caso lineal - son los vectores tangentes a las curvas coordenadas generadas cuando todas las variables se mantienen constantes y una sola varía; digamos $\overline{x}^1$: se genera la curva coordenada correspondiente a esa variable.

Si $x^1, x^2, ..., x^n$ son las coordenadas cartesianas (x, y, z) y el vector posición $\overrightarrow{r}$, se escribe

$$\overrightarrow{r} = xi + yj + zk$$

o

$$\overrightarrow{r} = x(\overline{x}^1, \overline{x}^2, \overline{x}^3)i + y(\overline{x}^1, \overline{x}^2, \overline{x}^3)j + z(\overline{x}^1, \overline{x}^2, \overline{x}^3)k$$

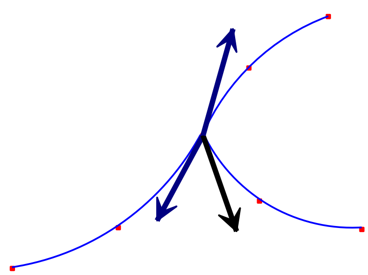
Si en esta ecuación se mantiene $\overline{x}^2 = c_2$, $\overline{x}^3 = c_3$ constantes, se genera una curva coordenada, y

$$\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial \overline{x}^1} = \frac{\partial x(\overline{x}^1, \overline{x}^2, \overline{x}^3)}{\partial \overline{x}^1} i + ... + \frac{\partial z(\overline{x}^1, \overline{x}^2, \overline{x}^3)}{\partial \overline{x}^1}$$

que resulta ser un vector tangente a la curva coordenada. De igual manera se obtienen

$$\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial \overline{x}^2} \quad ; \quad \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial \overline{x}^3}$$

vectores tangentes a las otras curvas coordenadas.



EJERCICIOS.

1. Encontrar la base contravariante para los sistemas: a) cartesiano en el plano. b) polar en el plano . c) Para el sistema u^1, u^2 , con $u^1 = x + 4y$, $u^2 = x - y$

2. Mostrar en una representación gráfica los correspondientes vectores de las bases determinadas en el anterior ejercicio.

3. Lo mismo que los dos ejercicios anteriores para a) cartesiano en el espacio. b) cilíndrico en el espacio. c) esférico en el espacio. d) Para el sistema u^1, u^2, u^3 con $u^1 = x - y$, $u^2 = x - z$, $u^3 = z$

0.2 CAMBIO DE BASE Y DE COORDENADAS

Se trata de determinar la relación entre dos sistemas de vectores tangentes, que corresponden a dos sistemas de coordenadas:

$$\begin{array}{rcl} x &=& x(u^1,u^2,u^3) \quad , \quad y = y(u^1,u^2,u^3) \quad , \quad z = z(u^1,u^2,u^3) \\ x &=& x(\overline{u}^1,\overline{u}^2,\overline{u}^3) \quad , \quad y = y(\overline{u}^1,\overline{u}^2,\overline{u}^3) \quad , \quad z = z(\overline{u}^1,\overline{u}^2,\overline{u}^3) \end{array}$$

y que realizando las composiciones de funciones se tiene:

$$\begin{array}{rcl} \overline{u}^1 &=& \overline{u}^1(u^1,u^2,u^3) \quad , \quad \overline{u}^2 = \overline{u}^2(u^1,u^2,u^3) \quad , \quad \overline{u}^3 = \overline{u}^3(u^1,u^2,u^3) \\ u^1 &=& u^1(\overline{u}^1,\overline{u}^2,\overline{u}^3) \quad , \quad u^2 = u^2(\overline{u}^1,\overline{u}^2,\overline{u}^3) \quad , \quad u^3 = u^3(\overline{u}^1,\overline{u}^2,\overline{u}^3) \end{array}$$

Escribiendo

$$\overrightarrow{r} = x(u^1(\overline{u}^1,\overline{u}^2,\overline{u}^3),u^2(\overline{u}^1,\overline{u}^2,\overline{u}^3),u^3(\overline{u}^1,\overline{u}^2,\overline{u}^3))\ i + ... + z(u^1,u^2,u^3)k$$

y aplicando la Regla de la Cadena, se obtiene

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\overline{u}^q} &=& \dfrac{\partial u^p}{\partial\overline{u}^q}\dfrac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial u^p} \quad ; \quad q = 1,2,3 \\ \dfrac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial u^p} &=& \dfrac{\partial\overline{u}^q}{\partial u^p}\dfrac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\overline{u}^q} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\overline{u}^1} \\ \frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\overline{u}^2} \\ \frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\overline{u}^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial\overline{u}^1} & \frac{\partial u^2}{\partial\overline{u}^1} & \frac{\partial u^3}{\partial\overline{u}^1} \\ \frac{\partial u^1}{\partial\overline{u}^2} & \frac{\partial u^2}{\partial\overline{u}^2} & \frac{\partial u^3}{\partial\overline{u}^2} \\ \frac{\partial u^1}{\partial\overline{u}^3} & \frac{\partial u^2}{\partial\overline{u}^3} & \frac{\partial u^3}{\partial\overline{u}^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial u^1} \\ \frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial u^2} \\ \frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial u^3} \end{pmatrix}$$

Entonces, para un cambio de coordenadas, se tiene

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{c} &=& \overline{c}^q\dfrac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\overline{u}^q} = c^p\dfrac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial u^p} = c^p\dfrac{\partial\overline{u}^q}{\partial u^p}\dfrac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\overline{u}^q} \\ \overline{c}^q &=& \dfrac{\partial\overline{u}^q}{\partial u^p}c^p \quad , \quad c^p = \dfrac{\partial u^p}{\partial\overline{u}^q}\overline{c}^q \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \overline{c}^1 \\ \overline{c}^2 \\ \overline{c}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\overline{u}^1}{\partial u^1} & \frac{\partial\overline{u}^1}{\partial u^2} & \frac{\partial\overline{u}^1}{\partial u^3} \\ \frac{\partial\overline{u}^2}{\partial u^1} & \frac{\partial\overline{u}^2}{\partial u^2} & \frac{\partial\overline{u}^2}{\partial u^3} \\ \frac{\partial\overline{u}^3}{\partial u^1} & \frac{\partial\overline{u}^3}{\partial u^2} & \frac{\partial\overline{u}^3}{\partial u^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \\ c^3 \end{pmatrix}$$

Mostrar que el caso de coordenadas rectilineas, ya visto, es un caso particular del caso anterior.

Por la forma de las ecuaciones de transformación de coordenadas, los vectores tangentes a las curvas coordenadas se conocen como *Base Contravariante.*

EJERCICIOS

1. Verificar para el vector $i + j$ (ubicado en el punto $(0,2)$ cartesiano) el cambio de coordenadas entre las bases contravariantes del sistema polar y el sistema u^1, u^2 , con $u^1 = x + 4y$, $u^2 = x - y$: a) Directamente . b) Empleando las ecuaciones de transformación determinadas de manera general

2. Verificar para el vector $i + j + z$ (ubicado en el punto $(0, 0, 2)$ cartesiano) el cambio de coordenadas entre las bases contravariantes del sistema cilíndrico y el sistema esférico a) Directamente . b) Empleando las ecuaciones de transformación que correspondan

0.3 BASE COVARIANTE

Dados dos sistemas de coordenadas en el espacio, u , $\overline{u}$:

$$\begin{aligned} u^1 &= u^1(x, y, z) \quad , \quad u^2 = u^2(x, y, z) \quad , \quad u^3 = u^3(x, y, z) \\ \overline{u}^1 &= \overline{u}^1(x, y, z) \quad , \quad \overline{u}^2 = \overline{u}^2(x, y, z) \quad , \quad \overline{u}^3 = \overline{u}^3(x, y, z) \end{aligned}$$

Las ecuaciones $u^1 = u^1(x, y, z) = c_1$, $u^2 = u^2(x, y, z) = c_2$, $u^3 = u^3(x, y, z) = c_3$, (lo mismo para el sistema $\overline{u}$)

se denominan superficies coordenadas.

Los vectores normales a las superficies coordenadas

$$\begin{aligned} &\nabla u^1 \quad , \quad \nabla u^2 \quad , \quad \nabla u^3 \\ &\nabla \overline{u}^1 \quad , \quad \nabla \overline{u}^2 \quad , \quad \nabla \overline{u}^3 \end{aligned}$$

determinan una base en el punto (c_1, c_2, c_3). Las bases que corresponden a dos sistemas diferentes se dan

$$\overline{u}^1(u^1(x, y, z), u^2(x, y, z), u^3(x, y, z)) = c_1$$

y

$$\begin{aligned} \nabla \overline{u}^1 &= \frac{\partial \overline{u}^1}{\partial x} i + \frac{\partial \overline{u}^1}{\partial y} j + \frac{\partial \overline{u}^1}{\partial z} k \\ \nabla \overline{u}^1 &= \left(\frac{\partial \overline{u}^1}{\partial u^1}\frac{\partial u^1}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u}^1}{\partial u^2}\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u}^1}{\partial u^3}\frac{\partial u^3}{\partial x}\right) i + ... + \left(\frac{\partial \overline{u}^1}{\partial u^1}\frac{\partial u^1}{\partial z} + \frac{\partial \overline{u}^1}{\partial u^2}\frac{\partial u^2}{\partial z} + \frac{\partial \overline{u}^1}{\partial u^3}\frac{\partial u^3}{\partial z}\right) k \end{aligned}$$

De donde

$$\nabla \overline{u}^1 = \frac{\partial \overline{u}^1}{\partial u^1}\left(\frac{\partial u^1}{\partial x} i + \frac{\partial u^1}{\partial y} j + \frac{\partial u^1}{\partial z} k\right) + ... + \frac{\partial \overline{u}^1}{\partial u^3}\left(\frac{\partial u^3}{\partial x} i + \frac{\partial u^3}{\partial y} j + \frac{\partial u^3}{\partial z} k\right) = \frac{\partial \overline{u}^1}{\partial u^1}\nabla u^1 + \frac{\partial \overline{u}^1}{\partial u^2}\nabla u^2 + \frac{\partial \overline{u}^1}{\partial u^3}\nabla u^3$$

Procediendo de la misma forma se obtiene

$$\begin{aligned} \nabla \overline{u}^q &= \frac{\partial \overline{u}^q}{\partial u^p}\nabla u^p \quad ; \quad q = 1, 2, 3 \\ \nabla u^p &= \frac{\partial u^p}{\partial \overline{u}^q}\nabla \overline{u}^q \quad ; \quad p = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Y el cambio de coordenadas se obtiene de

$$\begin{aligned} \overline{c} &= \overline{c}_q \nabla \overline{u}^q = c_p \nabla u^p = c_p \frac{\partial u^p}{\partial \overline{u}^q}\nabla \overline{u}^q \\ \overline{c}_q &= \frac{\partial u^p}{\partial \overline{u}^q} c_p \quad ; \quad c_p = \frac{\partial \overline{u}^q}{\partial u^p}\overline{c}_q \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \nabla\overline{u}^1 \\ \nabla\overline{u}^2 \\ \nabla\overline{u}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\overline{u}^1}{\partial u^1} & \frac{\partial\overline{u}^1}{\partial u^2} & \frac{\partial\overline{u}^1}{\partial u^3} \\ \frac{\partial\overline{u}^2}{\partial u^1} & \frac{\partial\overline{u}^2}{\partial u^2} & \frac{\partial\overline{u}^2}{\partial u^3} \\ \frac{\partial\overline{u}^3}{\partial u^1} & \frac{\partial\overline{u}^3}{\partial u^2} & \frac{\partial\overline{u}^3}{\partial u^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla u^1 \\ \nabla u^2 \\ \nabla u^3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \overline{c}_1 \\ \overline{c}_2 \\ \overline{c}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial\overline{u}^1} & \frac{\partial u^2}{\partial\overline{u}^1} & \frac{\partial u^3}{\partial\overline{u}^1} \\ \frac{\partial u^1}{\partial\overline{u}^2} & \frac{\partial u^2}{\partial\overline{u}^2} & \frac{\partial u^3}{\partial\overline{u}^2} \\ \frac{\partial u^1}{\partial\overline{u}^3} & \frac{\partial u^2}{\partial\overline{u}^3} & \frac{\partial u^3}{\partial\overline{u}^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

EJERCICIOS.

1. Encontrar la base covariante para los sistemas: a) cartesiano en el plano. b) polar en el plano . c) Para el sistema u^1, u^2 , con $u^1 = x + 4y$, $u^2 = x - y$
2. Mostrar en una representación gráfica los correspondientes vectores de las bases determinadas en el anterior ejercicio.
3. Lo mismo que los dos ejercicios anteriores para a) cartesiano en el espacio. b) cilíndrico en el espacio. c) esférico en el espacio. d) Para el sistema u^1, u^2, u^3 con $u^1 = x - y$, $u^2 = x - z$, $u^3 = z$
4. Verificar para el vector $i + j$ (ubicado en el punto $(0, 2)$ cartesiano) el cambio de coordenadas entre las bases contravariantes del sistema u^1, u^2 , con $u^1 = x + 4y$, $u^2 = x - y$; y $\overline{u}^1$, $\overline{u}^2$, con $\overline{u}^1 = 2x - 4y$, $\overline{u}^2 = x + y$ a) Directamente . b) Empleando las ecuaciones de transformación determinadas de manera general

0.4 BASE COVARIANTE ES LA BASE DUAL

Como

$$\begin{aligned} u^1 &= u^1(x, y, z) \quad , \quad u^2 = u^2(x, y, z) \quad , \quad u^3 = u^3(x, y, z) \\ u^1 &= u^1(x(u^1, u^2, u^3), y(u^1, u^2, u^3), z(u^1, u^2, u^3)) \\ u^2 &= u^2(x(u^1, u^2, u^3), y(u^1, u^2, u^3), z(u^1, u^2, u^3)) \\ u^3 &= u^3(x(u^1, u^2, u^3), y(u^1, u^2, u^3), z(u^1, u^2, u^3)) \end{aligned}$$

Aplicando la Regla de la Cadena

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^1}{\partial u^1} &= 1 = \frac{\partial u^1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u^1} + \frac{\partial u^1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u^1} + \frac{\partial u^1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u^1} \\ 1 &= (\frac{\partial u^1}{\partial x}i + \frac{\partial u^1}{\partial y}j + \frac{\partial u^1}{\partial z}k) \circ (\frac{\partial x}{\partial u^1}i + \frac{\partial y}{\partial u^1}j + \frac{\partial z}{\partial u^1}k) \\ 1 &= \nabla u^1 \circ \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u^1} \quad ; \quad \nabla u^1 \circ \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u^2} = 0 \quad ; \quad \nabla u^1 \circ \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u^3} = 0 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

EJERCICIOS

1. En el sistema u^1, u^2 , con : $u^1 = x+4y$, $u^2 = x-y$, realizar (siendo $V = R^2$) los productos tensoriales: a) $V \otimes V$, b) $V \otimes V^*$ y c) $V \otimes V^*$. En cada caso describa sus elementos. Para cada inciso determinar las ecuaciones de transformación , siendo el otro sistema $\overline{u}^1$, $\overline{u}^2$, con : $\overline{u}^1 = 2x - 4y$, $\overline{u}^2 = x + y$ .Y verificarlo con un ejemplo concreto