DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

FORMAS Y TENSORES
PRACTICA # 4
OPERACIONES CON TENSORES COORDENADAS CURVILINEAS
BASES CONTRA Y COVARIANTE
(28 mayo,2016)

G. Cupé

OPERACIONES CON TENSORES

Los elementos de espacios vectoriales cuya transformación de coordenadas obedecen a las del tipo que corresponden a

$$\begin{aligned} & V \otimes V \\ & V \otimes V \otimes V \\ & V^* \otimes V^* \\ & V^* \otimes V^* \otimes V^* \\ & V \otimes V \otimes V^* \otimes V^* \end{aligned}$$

se denominan *tensores* y sus espacios se dice que son tensoriales. Los elementos de V y V^* se denominan tensores de orden uno, contra y covariantes respectivamente. Los elementos del campo de escalares se denominan tensores de orden cero.

En los espacios tensoriales se pueden efectuar operaciones entre tensores que dan lugar en algún caso a tensores que ya no del mismo espacio.

1. SUMA DE TENSORES: Si se tienen dos tensores del mismo orden en covarianza y contravarianza, entonces si se suma término a término correspondiente, se obtiene como resultado un tensor con el mismo orden de contra y covarianza. (En el fondo, corresponde a una suma de funciones con la operación usual del espacio vectorial):

$$\begin{aligned} \overline{T}^p_q &= \overline{A}^p_i A^j_q T^i_j \\ \overline{U}^p_q &= \overline{A}^p_i A^j_q U^i_j \\ \overline{T}^p_q + \overline{U}^p_q &= \overline{A}^p_i A^j_q T^i_j + \overline{A}^p_i A^j_q U^i_j \end{aligned}$$

o

$$\overline{S}^p_q = \overline{T}^p_q + \overline{U}^p_q = \overline{A}^p_i A^j_q (T^i_j + U^i_j) = \overline{A}^p_i A^j_q S^i_j$$

Sean los vectores x , y , z , w, siendo $x = (1,1)$, $y = (2,0)$, $z = (-1,2)$, $w = (0,4)$, en base canónica:

i) determinar $T = x \otimes y^*$, $U = z \otimes w^*$

ii) determinar $S = T + U$.

iii) determinar la componente $\overline{S}^1_2$ en base $\overline{B} = \{(-1,1) \ , \ (0,2)\}$; tanto aplicando la fórmula de cambio de base, como escribiendo directamente los vectores en la base $\overline{B}$, y luego realizar el producto y suma respectivas.

2. MULTIPLICACION DE TENSORES: Si se tienen los tensores

$$\begin{aligned} \overline{T}^{pq} &= \overline{A}_i^p \overline{A}_j^q T^{ij} \\ \overline{U}_s^r &= \overline{A}_k^r A_s^m T_m^k \end{aligned}$$

se puede realizar el producto tensorial en el mismo sentido inicial de este concepto, pues los espacios que resultan de multiplicar tensorialmente un espacio V por sí mismo o su dual , *son también espacios vectoriales.*

En el caso concreto que tenemos, el producto resulta ser el tensor V:

$$\overline{V}_s^{pqr} = \overline{A}_i^p \overline{A}_j^q \overline{A}_k^r A_s^m V_m^{ijk}$$

donde la dimensión del tensor obtenido es igual al producto de las dimensiones de los factores y su orden de contravarianza y varianza es igual a la suma de los órdenes de los factores en forma respectiva.

Sean los vectores x , y , z , w, siendo $x = (1,1)$, $y = (2,0)$, $z = (-1,2)$, $w = (0,4)$, en base canónica:

i) determinar $T = x \otimes y$, $U = z \otimes w^*$

ii) determinar $V = T \otimes U$.

iii) determinar directamente $x \otimes\ y \otimes\ z \otimes w$.

3. Para el ejercicio anterior determinar la componente $\overline{V}_2^{121}$ en base $\overline{B} = \{(-1,1)\ ,\ (0,2)\}$; tanto aplicando la fórmula de cambio de base, como escribiendo directamente los vectores en la base $\overline{B}$, para luego realizar el producto respectivo.

4. CONTRACCION DE INDICES: Si tenemos el tensor

$$\overline{T}_r^{pq} = \overline{A}_i^p \overline{A}_j^q A_r^k T_k^{ij}$$

se *igualan dos índices, uno superior y otro inferior,* y se realiza la suma respectiva; se dice que se ha hecho una *contracción* de índices ; y se obtiene un tensor (un orden menos en contra y covarianza)

$$\begin{aligned} \overline{T}_q^{pq} &= \overline{A}_i^p \overline{A}_j^q A_q^k T_k^{ij} \\ \overline{T}_{\cdot}^{p\cdot} &= \overline{A}_i^p \delta_j^k T_k^{ij} = \overline{A}_i^p \delta_j^k T_k^{ij} = \overline{A}_i^p T_j^{ij} = \overline{A}_i^p T_{\cdot}^{i\cdot} \end{aligned}$$

Dado el tensor $T_k^{ij} = x \otimes y \otimes z^*$,siendo $x = (1,1)$, $y = (2,0)$, $z = (-1,1)$ expresados en base canónica; a) determinar el tensor $T_{\cdot}^{i\cdot}$ y b) verificar la última relación escrita en el ejercicio anterior, bajo el cambio a la base $\overline{B} = \{(1,-1)\ ,\ (0,4)\}$

5. MULTIPLICACION CONTRACTA : Si tenemos los tensores

$$\begin{aligned} \overline{T}^{pq} &= \overline{A}_i^p \overline{A}_j^q T^{ij} \\ \overline{U}_s^r &= \overline{A}_k^r A_s^m T_m^k \end{aligned}$$

y realizamos su producto

$$\overline{T}^{pq} \otimes \overline{U}_s^r = \overline{V}_s^{pqr} = \overline{A}_i^p \overline{A}_j^q \overline{A}_k^r A_s^m V_m^{ijk}$$

si se *igualan dos índices, uno superior y otro inferior,* y se realiza la suma respectiva; se dice que se ha hecho una *contracción* de índices ; y se obtiene un tensor (un orden menos en contra y covarianza)

$$\overline{V}_r^{pqr} = \overline{A}_i^p \overline{A}_j^q \overline{A}_k^r A_r^k V_k^{ijk}$$

6. Dada una base $B = (e_i)$, en un espacio con producto escalar; se define

$$g_{ij} = \langle e_i \mid e_j \rangle$$

Mostrar que los g_{ij}, son componentes de un tensor covariante de orden dos. Si $B = (e_i)$ es la base usual y $\overline{B} = (\overline{e}_j) = \{(1, -1) \ , \ (0, 2)\}$, determinar a) directamente $\overline{g}_{21}$.b) empleando la transformación covariante respectiva.

7. Mostrar o refutar: si se multiplica el tensor g_{ij} con el tensor o vector contravariante T^p $(g_{ij} \otimes T^p)$ y se realiza la contracción de índices, se obtiene las componentes covariantes del tensor T^p.

8. Mostrar o refutar: si se realiza la multiplicación contracta entre un vector x de V y otro vector y^* de V^*, equivale a realizar el producto escalar $\langle x \mid y \rangle$ (y es el vector correspondiente a y^* por la biyección canónica entre V y V^*.