DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

FORMAS Y TENSORES
PRACTICA # 3
PRODUCTO TENSORIAL
(16 Mayo,2016)

G. Cupé

Describiremos un método de unir dos espacios vectoriales para construir un tercer espacio vectorial, denominado su *producto tensorial.*

Si denotamos por P el conjunto de todos los polinomios a una variables x y de grado menor o igual a n; y por Q el conjunto de polinomios en otra variables y de grado menor o igual a m

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$
$$b_0 + b_1y + b_2y^2 + ... + b_my^m$$

y se W el conjunto de todos los polinomios en dos variables x , y ; y de grado menor o igual a $n + m$

$$c_{00} + c_{10}x + c_{01}y + c_{20}x^2 + c_{02}y^2 + c_{11}xy + ... + c_{nm}x^ny^m$$

que se obtiene mediante el usual *producto de polinomios (haciendo la completación correspondiente):* donde

$$r(x, y) = p(x)q(y)$$

1. Mostrar que P es un espacio vectorial de dimensión $n + 1$, que Q es de dimensión $m + 1$; y que W tiene dimensión $(n + 1)(m + 1)$

En el ejemplo anterior de los polinomios hemos considerado espacios vectoriales cuyos elementos son `funciones.` En ese sentido se puede considerar el espacio vectorial R^n como una colección de funciones de la siguiente manera:

El vector $(x_1, x_2, ..., x_n)$ se puede considerar como una función x definida en el conjunto $\{1, 2, 3, ..., n\}$ en los números reales, tal que

$$x(1) = x_1\ ,\ x(2) = x_2\ ,\ .....,\ x(n) = x_n$$

Para los elementos de la base usual de R^n se tiene

$$\begin{aligned} e_i(j) &= 1 \ ; \ i = j \\ &= 0 \ ; \ i \neq j \end{aligned}$$

Si tomamos dos elementos de R^n: x , y ; considerándolos como funciones indicado anteriormente, se define el `producto tensorial` $x \otimes y$, como

$$x \otimes y(i, j) = x(i)y(j)$$

$x \otimes y$ tiene como dominio $\{1, 2, ..., n\} \times \{1, 2, ..., n\}$.

se puede ver en una tabla, para el caso $n = 3$, si $x = (x^1, x^2, x^3)$, $y = (y^1, y^2, y^3)$ en base $\{e_i\}$ usual

1.

$x \otimes y$	y^1	y^2	y^3
x^1	x^1y^1	x^1y^2	x^1y^3
x^2	x^2y^1	x^2y^2	x^2y^3
x^3	x^3y^1	x^3y^2	x^3y^3

2.- Mostrar que $R^n \otimes R^n = \{x \otimes y \mid x \in R^n \quad , \quad y \in R^n\}$, denominado `espacio producto tensorial` de R^n por R^n es un espacio vectorial de dimensión n^2

3.- Considerando $R^n \otimes R^n$ y R^n como espacios vectoriales, construir el `producto tensorial` $(R^n \otimes R^n) \otimes R^n$

4.- Mostrar que

$$(R^n \otimes R^n) \otimes R^n = R^n \otimes (R^n \otimes R^n)$$

por lo que simplemente escribiremos $R^n \otimes R^n \otimes R^n$

5. Si $\{e_i\}$ es la base canónica de R^n y $\{\overline{e}_j\}$ es otra base cualquiera de R^n , se define

$$\begin{aligned} \overline{e}_j(k) &= (a_1e_1 + a_2e_2 + ... + a_ne_n)(k) \\ &= a_1e_1(k) + a_2e_2(k) + ... + a_ne_n(k) \end{aligned}$$

Mostrar que siendo $B = (e_i)$ cualquier base de R^n, $x = x^ie_i \quad , \quad y = y^je_j$ (escritor en notación de Einstein); entonces

$$x \otimes y = (x^ie_i) \otimes (y^je_j) = x^iy^j(e_i \otimes e_j)$$

donde $(e_i \otimes e_j)(a, b) = e_i(a)e_j(b)$.

6.- Mostrar que se cumplen las 3 propiedades indicadas en la sección 3.1,página 48 del texto de referencia.

7.- Si se toman dos bases cualesquiera $B = (e_i)$ y $\overline{B} = \{\overline{e}_j\}$ de R^n y se escribe $x = \overline{x}^p\overline{e}_p$; $y = \overline{y}^q\overline{e}_q$;el producto tensorial estará referido a la base $\{\overline{e}_j\}$; y sus términos son de la forma $\overline{x}^p\overline{y}^q$. Mostrar que

$$\begin{aligned} e_i &= \overline{A}^j_i\overline{e}_j \quad ; \quad \overline{e}_j = A^i_je_i \quad ; \qquad \text{entonces} \\ \overline{x}^p\overline{y}^q &= \overline{A}^p_i\overline{A}^q_jx^iy^j \end{aligned}$$

1. Verificar sus fórmulas para el caso $x = 2e_1 + 3e_2$, $y = 4e_1 - e_2$; donde $B = \{e_1 = (1, 1)\ ,\ e_2 = (2, 0)\}$; y $\overline{B} = \{\overline{e}_1 = (-1, 1)\ ,\ \overline{e}_2 = (0, 2)\}$.

8.- Si se considera el espacio dual $(R^n)^*$ de R^n constituído por el espacio vectoriales de los funcionales definidos en R^n, una base (usual) es la `base dual` $\{\chi^p\}$ correspondiente a (e_i)

$$\begin{aligned} \chi^p(e_i) &= 1 \quad \text{si} \quad p = i \\ &= 0 \quad \text{si} \quad p \neq i \end{aligned}$$

Si consideramos cada funcional y^* como una función de $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, según la regla: si $y^* = y^*_1\chi^1 + ... + y^*_n\chi^n$, entonces $y^*(e_1) = y^*_1$, , $y^*(e_n) = y^*_n$.

Se define el `producto tensorial` $y^* \otimes z^*$, como

$$y^* \otimes z^*(e_i, e_j) = y^*(e_i)z^*(e_j)$$

Mostrar que $\{y^* \otimes z^* \mid y^* \ , \ z^* \ \in (R^n)^* \ \}$ es un espacio vectorial de dimensión n^2.

Determinar las ecuaciones de cambio de base.

9.- A partir de las definiciones anteriores, cómo se deberían definir

$$R^n \otimes (R^n)^*$$

Cuál sería la dimensión y una base del espacio vectorial $R^n \otimes (R^n)^*$.

10.- Si los elementos de R^n y $(R^n)^*$ x , y escribimos, respectivamente en la forma

$$x = x^i e_i \qquad y = y_j \chi^j$$

entonces los productos tensoriales de dos vectores tendrían respectivamente las componentes

$$\begin{array}{lllll} x^i y^j & ; & \text{en} \quad R^n \otimes R^n & ; & \text{en base} \quad e_i \otimes e_j \\ x^i y_j & ; & \text{en} \quad R^n \otimes (R^n)^* & ; & \text{en base} \quad e_i \otimes \chi^j \\ x_i y_j & ; & \text{en} \quad (R^n)^* \otimes (R^n)^* & ; & \text{en base} \quad \chi^i \otimes \chi^j \end{array}$$

escribir las fórmulas correspondientes a los cambios de base para cada caso.

11.- Si las expresiones $x^i y^j$, $x^i y_j$, $x_i y_j$, que son números; se les simboliza respectivamente de la forma T^{ij}, T^i_j , T_{ij} ; entonces mostrar que las ecuaciones de cambio de base son :

$$\begin{array}{lrcl} (a) & \overline{T}^{pq} & = & \overline{A}^p_i \overline{A}^q_j T^{ij} \\ (b) & \overline{T}^p_q & = & \overline{A}^p_i A^j_q T^i_j \\ (c) & \overline{T}_{pq} & = & A^i_p A^j_q T_{ij} \end{array}$$

Los conjuntos de números T^{ij} , T^i_j , T_{ij} se denominan componentes de un tensor contravariante de orden 2 , tensor mixto una vez contravariante y otra covariante; y tensor covariante de orden 2, respectivamente. Esto se define, en base a la forma de cambiar dichos números cuando se realiza un cambio de base.

Verificar estas fórmulas para el caso de a) R^2 , $x = (1, 1)$, $y = (2, 0)$ dado en base usual y la nueva base es $\{\overrightarrow{e}_j\}$ igual a $\{\overrightarrow{e}_1 = e_1 - e_2 \ , \ \overrightarrow{e}_2 = 2e_1 + e_2\}$ .b) $x = (1, 1)$, $y^* = (2, 0)$. c) $x^* = (1, 1)$, $y^* = (2, 0)$. Donde las bases son las indicadas en el inciso a) , y/o sus base duales.