DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS
CARRERA MATEMATICAS

TENSORES Y FORMAS
UNIDAD 1 VECTORES Y TENSORES
PRACTICA # 1

29 - abril, 2016

0.1. ESPACIOS VECTORIALES - CAMBIO DE BASE

1. Definir qué es una base de un espacio vectorial V (caso finito dimensional). A partir de dicha definición, mostrar que dos base (finitas) cualesquiera tienen el mismo número de elementos.

2. Si $B = \{e_i\}$ y $\overline{B} = \{\overline{e}_j\}$ son dos bases diferentes; donde

$$\overline{e}_j = A^i_j e_i \qquad , \quad e_i = \overline{A}^j_i \overline{e}_j$$

mostrar que

$$\overline{A}^j_i = (A^i_j)^{-1}$$

Nota.- Observe que para dimensión 2 , las relaciones anteriores se pueden escribir

$$\begin{pmatrix} \overline{e}_1 \\ \overline{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^1_1 & A^2_1 \\ A^1_2 & A^2_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{A}^1_1 & \overline{A}^2_1 \\ \overline{A}^1_2 & \overline{A}^2_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{e}_1 \\ \overline{e}_2 \end{pmatrix}$$

3. Verificar lo demostrado en el ejercicio anterior, cuando $B = \{(1,1),(2,0)\}$, $\overline{B} = \{(1,-1),(0,4)\}$

4. Mostrar que si un vector x se escribe en las dos bases

$$x = x^i e_i \qquad , \quad x = \overline{x}^j \overline{e}_j$$

entonces la relación entre componentes es

$$\overline{x}^j = \overline{A}^j_i x^i \qquad , \quad x^i = A^i_j \overline{x}^j$$

Nota.- Observe que las relaciones anteriores se pueden escribir

$$\begin{pmatrix} \overline{x}^1 \\ \overline{x}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{A}^1_1 & \overline{A}^1_2 \\ \overline{A}^2_1 & \overline{A}^2_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^1_1 & A^1_2 \\ A^2_1 & A^2_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x}^1 \\ \overline{x}^2 \end{pmatrix}$$

donde A^i_j , $\overline{A}^j_i$ están definidos según el ejercicio 2.Observe que las matrices para el cambio de componentes son las traspuestas de las que aparecen en la relación entre bases.

5. Verificar lo demostrado en el ejercicio anterior, cuando $B = \{(1,1),(2,0)\}$, $\overline{B} = \{(1,-1),(0,4)\}$ y $x = (4,8)$

6. Si $B = \{e_i\}$ y $\overline{B} = \{\overline{e}_j\}$ son dos bases diferentes; donde

$$\overline{e}_j = A^i_j e_i \qquad , \quad e_i = \overline{A}^j_i \overline{e}_j$$

mostrar, considerando dichas relaciones, que los determinantes de las matrices A^i_j , $\overline{A}^j_i$, tienen su determinante diferente de 0.

Sug: Suponer en cada caso que el determinante es 0 ; y a partir de dicho supuesto mostrar que los vectores $\{e_i\}$ (y los vectores $\{\overline{e}_j\}$) son linealmente dependientes.

7. Si una matriz cualquiera A^i_j (i columna , j fila) tiene determinante diferente de 0 , se puede considerar como una matriz que relaciona dos base ($\overline{e}_j = A^i_j e_i$) . Si es así, indique las bases involucradas $B = \{e_i\}$ y $\overline{B} = \{\overline{e}_j\}$.

0.2. ESPACIO DUAL

1. Mostrar que la dimensión del espacio dual V^* de V , tiene la misma dimensión que V (caso finito dimensional). Sug: Defina los funcionales conocidos como base "dual"$B^* = \{\chi^p\}$ de la base $B = \{e_i\}$.

2. Halle la base dual de la siguiente base de R^2, $B = \{(1,-1),(0,2)\}$. Debe indicar dos funcionales.

3. Sea V el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a 1. Esto es, $V = \{p(t) \mid p = a + bt\}$.

Sean los funcionales de V^*:

$$f_1(p(t)) = \int_0^1 p(t)dt \quad ; \qquad f_2(p(t)) = \int_0^2 p(t)dt$$

Hallar la base de V, tal que su base dual exactamente esté formada por f_1 y f_2.

4. Sea $B = \{e_i\}$ una base de un espacio vectorial V ; y $B^* = \{\chi^p\}$su base dual. a) Mostrar que para cualquier vector x de V:

$$x = \chi^p(x)e_p = \chi^1(x)e_1 + \chi^2(x)e_2 + ... + \chi^n(x)e_n$$

b) Mostrar que para cualquier funcional f de V^*:

$$f = f(e_i)\chi^i = f(e_1)\chi^1 + f(e_2)\chi^2 + ... + f(e_n)\chi^n$$

0.3. ISOMORFISMO ENTRE V Y V^*

Se supone que V es un espacio con producto interior $< u \mid v >$

1. Se define $F : V \to V^*$: $y \to F_y$

$$F_y(x) = < x \mid y >$$

Mostrar que F está bien definida (esto es, que F_y es realmente un funcional y que a cada y le corresponde una sola imagen)

Mostrar que F es inyectiva

Mostrar que F es sobreyectiva

Mostrar que $F_{y+z} = F_y + F_z$. $F_{\lambda y} = \lambda F_y$

2. Ilustrar los pasos seguidos en el ejercicio anterior para el caso $V = R^3$ y el producto interior es el usual : $< u \mid v >= u^1v^1 + u^2v^2 + u^3v^3$. Hallar F_y , para $y = (1, -1, 4)$

3. Lo mismo que en el ejercicio anterior, pero con el producto interior

$$< u \mid v >= (u^1, u^2, u^3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}$$

Hallar F_y , para $y = (1, -1, 4)$.

0.4. CAMBIO DE BASE EN V^*

1. Si $B = \{e_i\}$ y $\overline{B} = \{\overline{e}_j\}$ son dos bases diferentes en V^*; donde

$$\overline{e}_j = A^i_j e_i \qquad , \quad e_i = \overline{A}^j_i \overline{e}_j$$

y sean las relaciones entre las bases duales respectivas

$$\overline{\chi}^q = \alpha^q_p \chi^p \qquad , \quad \chi^p = \overline{\alpha}^p_q \overline{\chi}^q$$

Determinar las relaciones entre A^i_j , $\overline{A}^j_i$, α^q_p , $\overline{\alpha}^p_q$ en términos matriciales.

2. Verificar las afirmaciones del ejercicio anterior para $B = \{(1, 1), (2, 0)\}$, $\overline{B} = \{(1, -1), (0, 4)\}$

3. Si un funcional y^* se escribe en las bases duales correspondientes a $B = \{e_i\}$ y $\overline{B} = \{\overline{e}_j\}$:

$$y^* = y^*_p \chi^p = \overline{y}^*_q \overline{\chi}^q$$

Determinar las transformaciones que permiten encontrar $\overline{y}^*_q$ en términos de , y viceversa:

$$\overline{y}^*_q = \beta^p_q y^*_p \qquad , \; y^*_p = \overline{\beta}^q_p y^*_q$$

y relacionar las matrices β^p_q y $\overline{\beta}^q_p$ con las matrices A^i_j , $\overline{A}^j_i$.

4. Verificar las afirmaciones del ejercicio anterior para $B = \{(1, 1), (2, 0)\}$, $\overline{B} = \{(1, -1), (0, 4)\}$ y el funcional y^* : $y^*(x, y) = x - 2y$; donde (x, y) está dado en la base $\{(1, 0), (0, 1)\}$