INTRODUCCION

Desde la época de los griegos, los textos relacionados a lo que hoy se llama matemáticas contienen párrafos denominados pruebas o demostraciones. Es posible que el significado de prueba en el sentido que los griegos dieron a esta palabra, no se pueda encontrar fuera de las matemáticas.

En verdad, podemos decir que su significado de fondo no ha cambiado hasta nuestros días, lo que constituía una prueba para Euclides es todavía una prueba para nosotros; y las veces que el concepto de prueba ha estado en peligro de degeneración u olvido, (y por tanto las matemáticas mismas han sido amenzadas); por lo que los científicos han vuelto a la esencia de los modelos de prueba de los griegos. Además, este maravilloso legado ha sido engrandecido durante los últimos cien años gracias a los desarrollos importantes acaecidos en diferentes áreas del conocimiento humano .

Del análisis de los métodos y mecanismos de prueba en textos matemáticos adecuadamente escogidos, es posible discernir acerca del vocabulario y la sintáxis que subyacen en el documento. Este análisis nos lleva a la conclusión que un texto matemático puede expresarse de manera explícita empleando un lenguaje convencional conteniendo solamente una pequeña cantidad de palabras conjuncionadas de acuerdo a una sintaxis que consiste en un número reducido de reglas rígidas. Tales lenguajes se denominan *lenguajes formalizados.*

Se puede tener la idea de lenguaje formalizado al observar o leer la transcripción de una partida de ajedrez, y sabiendo que en dicho "texto" han sido respetadas determinadas reglas (que son las reglas del juego del ajedrez).

Por otra parte, en un texto en lenguaje no formalizado, uno se expone al peligro de dar a un término un significado distinto al que el autor quiso darle; en general un lenguaje no formalizado en impreciso; y por eso es posible que ocurran fallas en los razonamientos realizados en dicho lenguaje, por ejemplo; por el uso incorrecto de la intuición o argumentos empleados por analogía.

El *método axiomático* es, hablando estrictamente, nada más que el arte de escribir textos en lenguaje formalizado, cuya formalización ya está desarrollada previamente. Como tal un lenguaje formalizado, no es un nueva invención; pero su empleo sistemático como un instrumento de descubrimiento es uno de los hechos originales de la matemática contemporánea.

De la misma manera que hablar un lenguaje correctamente precede a la invención de la gramática, así el *método axiomático* ha sido practicado hace mucho tiempo, antes de la invención de los lenguajes formalizados; pero su práctica eficiente solo puede descansar en el conocimiento de los principios generales que gobiernan tales lenguajes y su relación con los textos matemáticos usuales.

En los capítulos siguientes describiremos un lenguaje formalizado.

En tanto que en el pasado se pensaba que cada rama o área de la matemática dependía de sus particulares intuiciones que proveían los conceptos y las *verdades primeras;* hoy en día, se sabe que es posible, lógicamente hablando, derivar prácticamente todo el contenido matemático a partir de una sola fuente, *la Teoría de Conjuntos.* Entonces , es suficiente para nuestro propósito describir los principios de un lenguaje formalizado, e indicar cómo la Teoría de Conjuntos puede escribirse en este lenguaje, y mostrar cómo las diferentes ramas de las matemáticas ingresan en este marco estructural.

La descripción de un lenguaje formalizado, como es de suponer, se debe realizar en el lenguaje ordinario, de manera semejante a como se desarrollan las reglas del ajedrez.

Si las matemáticas formalizadas fueran tan simple como un juego de ajedrez, entonces una vez elegido el lenguaje formalizado a emplearse; quedaría la tarea de escribir las pruebas en este lenguaje; justo como el autor de un manual de ajedrez escribe en su notación los juegos que él se propone enseñar, acompañados por los comentarios que considere necesario.

Pero en el caso de las matemáticas la situación no es tan simple, no se necesita mucha experiencia para darse cuenta que una pequeña prueba en el comienzo de la Teoría de Conjuntos requiere varios cientos de signos para su completa formalización.

Lo anterior justifica el hecho imperativo de *condensar* o abreviar un texto formalizado mediante la introducción de nuevas palabras (llamados *símbolos de abreviación*) y también reglas adicionales de sintáxis (llamadas *criterios deductivos*). Haciendo esto obtenemos un lenguaje que es mucho más manejable que el lenguaje formalizado en el sentido estricto.

En consecuencia, iremos abandonando muy rápidamente las matemáticas formalizadas, pero no sin antes tener el cuidado de conocer el camino que permite retornar al texto formalizado. El término "*abuso de lenguaje*" que introduciremos nos permitirá escribir las matemáticas de la misma manera que los hacen los textos matemáticos de manera usual, esto es; el texto final estará en parte en lenguaje ordinario y en parte se tendrán fórmulas que se constituyen en expresiones particulares, parciales e incompletas del lenguaje formalizado.

Part I

CAPITULO 1

0.1 1. TÉRMINOS Y RELACIONES

Los términos matemáticos esencialmente son los objetos (conceptos) al que nos referiremos en el desarrollo de un texto matemático; mientras que las relaciones son las oraciones (afirmaciones) que realizamos acerca de los objetos.

Los términos son como el sujeto de una oración en el lenguaje ordinario; son las cosas que manejaremos y a los que nos referiremos en un estudio matemático; mientras que las relaciones son afirmaciones u oraciones que relacionan a los objetos con los que trabajamos.

Tal como en un lenguaje ordinario, en el lenguaje formal se tiene *signos* que son semejantes a las letras del alfabeto y con los cuales se construyen las palabras; las palabras en un lenguaje formal se denominan *fórmulas,* que son sucesiones de símbolos.

SÍGNOS Y FÓRMULAS

Los *signos* de una teoría matemática $\mathbb{T}$ son los siguientes:

(1) Los *signos lógicos* : $\square$, τ, $\vee$, $\sim$

(2) Las *letras*

Se pueden emplear letras mayúsculas y minúsculas, con o sin acentos. Entonces A, A' , A'', a, a', son letras. En cualquier parte de un texto es posible introducir letras distintas a las que aparecen en párrafos anteriores.

(3) Los *signos específicos,* que dependen de la teoría considerada

En la Teoría de Conjuntos se empleará únicamente los siguientes tres signos específicos: $=$, $\in$, $\supset$.

Una fórmula en $\mathbb{T}$ es una sucesión de signos de $\mathbb{T}$ escritos uno tras otro. Ciertos signos, distintos de las letras, se pueden unir en pares por barras por encima de la fórmula, y que se llaman *enlaces.* Por ejemplo, en la Teoría de Conjuntos, en la que $\in$ es un signo específico,

$$\overline{\overline{\tau\vee\rceil \in \square}A' \in \square}A''$$

es una fórmula. Su significado quedará claro a medida que se avance en el tema.

El uso exclusivo de fórmulas llevaría a dificultades insuperables tanto al impresor como al lector. Por esta razón, los textos corrientes emplean símbolos de abreviación (que son en realidad palabras del lenguaje ordinario) que no pertenecen a la matemática formal. La introducción de tales símbolos es el objeto de las *definiciones.* El empleo de símbolos *no es indispensable para la teoría,* y puede con frecuencia conducir a una confusión que solamente una cierta familiaridad con el tema permitirá al lector evitarla.

Ejemplos

(1) La fórmula $\vee\rceil$ se representa por $\Longrightarrow$.

(2) Los siguientes símbolos representan fórmulas (y algunas muy largas)

$$\begin{array}{rcl}
 & & 3\ y\ 4 \\
 & & \varnothing \\
 & & \mathbb{N} \\
 & & \mathbb{Z} \\
 & & \text{La recta real} \\
 & & \text{La función } \Gamma \\
 & & f \circ g \\
\pi & = & \sqrt{2} + \sqrt{3} \\
 & & \text{Todo anillo finito de división es un campo}
\end{array}$$

En general los símbolos usados para representar una fórmula contienen todas las letras que aparecen en la fórmula. Sin embargo, este principio puede ser infringido algunas veces sin ningún riesgo de confusión. Por ejemplo, "*la completación de* $\mathbb{X}$ " representa una fórmula que contiene la letra $\mathbb{X}$, fórmula que contiene también la letra que representa el conjunto de entornos de la estructura uniforme de $\mathbb{X}$. Por otra parte

$$\int_0^1 f(x)dx$$

representa una fórmula en la que la letra x (y la letra d) no aparecen; y los símbolos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, "*la función* Γ" , que representan ciertas fórmulas, no contienen letras de dichas fórmulas.

Una *teoría matemática (o simplemente una teoría)* contiene reglas que permiten distinguir sucesiones de signos o fórmulas son *términos* o *relaciones* de la teoría, y otras reglas que nos permiten afirmar si ciertas fórmulas son *teoremas* de la *teoría.*

La descripción de estas reglas no pertenecen a la matemática formal; y además dichas reglas contienen fórmulas que pueden ser indeterminadas, por ejemplo letras indeterminadas.

Para simplificar una exposición es conveniente denotar las fórmulas por símbolos en general poco usuales para evitar confusiones. Emplearemos especialmente combinaciones de signos (de una teoría matemática) letras mayúsculas cursivas (con o sin subíndices o acentos), y símbolos particulares de los que daremos algunos ejemplos.

Puesto que nuestro propósito es únicamente evitar circunlocuciones (definir un concepto empleando conceptos aún no definidos), no enunciaremos reglas estrictas para el uso de estos símbolos (abreviaciones); el lector será capaz de reconstruir sin problema la fórmula en cuestión en cada caso particular. Por abuso de lenguaje con frecuencia diremos que los *símbolos* son fórmulas, más que ellos denotan fórmulas: la expresión como" *la fórmula* **A**" , debe ser reemplazada por "*la fórmula denotada* por **A**".

Si **A** y **B** denotan fórmulas, denotaremos por **AB** la fórmula obtenida al escribir la fórmula **B** a la derecha de la fórmula **A.** Denotaremos por $\vee A \rceil B$ la fórmula obtenida al escribir sucesivamente el signo $\vee$ seguido de la fórmula **A,** el signo $\rceil$ y la fórmula **B.**

Si **A** es una fórmula y **x** es una letra, denotaremos por $\tau_x(A)$ la fórmula construída como sigue:

Formamos la fórmula τA

Enlazamos cada ocurrencia de **x** en **A** al signo τ que aparece a la izquierda de **A**, y reemplazamos la letra **x** que ocurre en **A** por el signo $\square$.La fórmula denotada por $\tau_x(A)$no contiene la letra **x** .

Por ejemplo, el símbolo $\tau_x(\in xy)$ representa la fórmula

$$\overline{\tau \in \square}y$$

Intuitivamente $\in xy$ que el objeto x pertenece al objeto y; mientras que $\overline{\tau \in \square}y$ es el símbolo para denotar a x a través de la propiedad que verifica (el de pertenecer a y). En este nivel, aún no se menciona si realmente existe un objeto que pertenece a y; o en caso de que exista tal objeto sea único.

Cuando se introduce un símbolo $\sum$ por medio de una definición para representar una cierta fórmula, de manera implícita se conviene que la fórmula obtenida sustituyendo una fórmula **B** por la letra **x** en la fórmula original, se representa por el símbolo obtenido al reemplazar la letra **x** en la fórmula $\sum$ por la fórmula **B** (o con mayor frecuencia, por un símbolo abreviado de la fórmula **B**). Esta regla puede llevar a confusiones, que se pueden evitar mediante el empleo de varios medios tipográficos; siendo el más común el de reemplazar **x** por **(B)** en lugar de simplemente **B**.

Por ejemplo, $M \cap N$ denota una fórmula conteniendo la letra N.Si sustituímos en lugar de N la fórmula representada por $P \cup Q$,, podemos representar la fórmula final por $M \cap (P \cup Q)$.

1 CRITERIOS DE SUSTITUCIÓN

La matemática formal solamente contiene fórmulas explícitamente escritas. Sin embargo, aún con el empleo de símbolos de abreviación, el desarrollo de la matemática estrictamente conforme a este principio conduciría a cadenas de símbolos extremadamente largas en los razonamientos. Por esta razón se establecen *criterios* para relacionar fórmulas indeterminadas (esto es, fórmulas generales); estos criterios permiten realizar de una vez por todas el resultado final de una sucesión definida de manipulaciones con estas fórmulas. Estos criterios no son por tanto indispensables para el desarrollo de la teoría; su justificación pertenece al área de la *metamatemática.*

El desarrollo de las matemáticas por sí misma requiere, en la práctica, el uso de símbolos de abreviación, algunos de los cuales han sido indicados de manera previa. Muchos de estos símbolos son también usados en la matemática.

A manera de indicación simplemente, se empleará los siguientes resultados, denominados *criterios de sustitución.*

CS1. Sean **A** y **B** son fórmulas y **x** , **x'** letras. Si **x'** no aparece en **A**, entonces

(**B**|**x**)**A** es idéntica a (**B**|**x'**)(**x'**|**x**)**A**

2 CONSTRUCCIONES FORMATIVAS

Algunos signos específicos de una teoría se llaman *relacionadores* y otros se llaman *sustantificadores.* Con cada signo específico está asociado un número natural llamado su *peso* (que es casi siempre 2).

∘ Una fórmula se dice que es de *primera especie* si comienza con el signo τ, o con un signo *sustantificador*, o si consiste de una sola letra; en cualquier otro caso se dice que es de *segunda especie.*

∘ Una *construcción formativa* en una teoría **T** es una sucesión de fórmulas que tienen la siguiente propiedad: Para cada fórmula **A** de la sucesión, una de las siguientes condiciones se satisface:

(a) **A** es una letra.

(b) Existe en la sucesión una fórmula **B** de segunda especie que precede a **A**, tal que **A** es $\rceil$**B**

(c) Existen dos fórmulas **B** y **C** de segunda especie (diferentes o no) que preceden a **A** , tal que se tiene que **A** es $\vee$**BC**.

(d) Existe una fórmula **B** de segunda especie, que precede a **A**, y una letra **x** tal que **A** es $\tau_x(\mathbf{B})$

(e) Hay un signo específico **s** de peso n (*)[1] en la teoría $\mathbb{T}$, y n fórmulas $\mathbf{A}_1$,$\mathbf{A}_2$, ...,$\mathbf{A}_n$ de primera especie, que preceden a **A**, tal que **A** es $\mathbf{sA}_1\mathbf{A}_2$.....$\mathbf{A}_n$.

Las fórmulas de primera especie (respectivamente las de segunda especie) que *aparecen* en una *construcción formativa* de $\mathbb{T}$ se llaman *términos* (resp. *relaciones*) en $\mathbb{T}$.

Ejemplo. En la teoría de conjuntos, en la que $\in$ es un signo relacionador de peso 2, la siguiente sucesión de fórmulas es una construcción formativa

$$\begin{array}{ccl} & & A \\ & & A' \\ & & A'' \\ & \in & AA' \\ \text{ç} & \in & AA'' \\ \rceil & \in & AA' \\ \vee & \in & AA' \in AA'' \\ & & \overline{\overline{\tau\vee\in\Box}A'\in\Box A''} \end{array}$$

Por lo tanto la fórmula dada en el anterior ejemplo es un término en la teoría de conjuntos.

Nota.- *Intuitivamente, los términos son fórmulas que representan objetos, y las relaciones representan aserciones o afirmaciones que pueden hacerse sobre los objetos.*

La condición (b) significa que si **B** es una afirmación , entonces $\rceil$**B** , llamada *negación* de **B,** es una afirmación **(**que se lee: no **B**) . La condición (c) significa que si **B** y **C** son aserciones, $\vee$**BC** que se denomina la *disjunción* de **B** y **C** **,** es una aserción (que se lee: **B** o **C**); también $\Longrightarrow$**BC** es una afirmación (en palabras: ambos **B** o **C** . La fórmula $\Longrightarrow$**BC** es una afirmación o aserción (en palabras corrientes: o no **B** o **C** **,** o "**B** implica **C**").

La condición (d) significa que si **B** es una aserción y **x** es una letra, entonces $\tau_x(\mathbf{B})$ es un objeto. Consideremos a la aserción **B** como expresando una propiedad del objeto **X**; entonces , si existe un objeto que tiene la propiedad en cuestión, $\tau_x(\mathbf{B})$ representa un objeto distinguido que tiene la propiedad en cuestión; en caso contrario, $\tau_x(\mathbf{B})$ representa un objeto acerca del cual no se puede decir nada.

Finalmente, la condición (e) significa que si $\mathbf{A}_1$,$\mathbf{A}_2$, ...,$\mathbf{A}_n$ son objetos y si **s** es signo relacionador(respectivamente *sustantificador*) de peso n; entonces

[1] En el actual desarrollo de las teorías matemáticas en general emplean signos específicos de peso 2; que en cada caso que se mencione un signo específico se debe entender que su peso es 2.

$\mathbf{sA}_1$,$\mathbf{A}_2$, ...,$\mathbf{A}_n$ es una afirmación acerca de los objetos (o resp. un objeto que depende de $\mathbf{sA}_1$,$\mathbf{A}_2$, ...,$\mathbf{A}_n$).

Ejemplos:

Los símbolos $\emptyset$, $\mathbb{N}$, " la recta real", "la función Γ", $f \circ g$ representan términos. Los símbolos $\pi = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, $1 \in 2$, "todo anillo finito de división es un campo" representan relaciones. El símbolo "3 y 4" no representan ningún término ni ninguna relación.

El signo inicial de una relación es $\vee$, $\rceil$, o un signo relacionador. El signo inicial de un término es τ, o un signo sustantificador, siempre que el término no consista de una sola letra. La última afirmación sigue del hecho que un término es una fórmula de primera especie. Si **A** es una relación, entonces **A** aparece en una construcción formativa. Si no es una letra y no empieza con τ, se tiene que 3 casos son posibles: (1) **A** está precedida por una fórmula **B** tal que **A** es $\rceil$**B**; (2) **A** está precedida por dos fórmulas **B** y **C** tal que **A** es $\vee$**BC** ; (3) **A** está precedida por las fórmulas $\mathbf{A}_1$,$\mathbf{A}_2$, ...,$\mathbf{A}_n$ tal que **A** es $\mathbf{sA}_1$,$\mathbf{A}_2$, ...,$\mathbf{A}_n$, siendo **s** un signo de relación.

3 CRITERIOS FORMATIVOS

CF1. Si **A** y **B** son relaciones en una teoría $\mathbb{T}$, entonces $\vee$**AB** es una relación en $\mathbb{T}$.

CF2. Si **A** es una relación en una teoría $\mathbb{T}$, entonces $\rceil$**A** es una relación en $\mathbb{T}$.

CF3. Si **A** es una relación en una teoría $\mathbb{T}$, y si **x** es una letra, entonces $\tau_x(\mathbf{A})$ es un término en $\mathbb{T}$.

CF4. Si $\mathbf{A}_1$,$\mathbf{A}_2$, ...,$\mathbf{A}_n$ son términos en una teoría $\mathbb{T}$, si **s** es un relacionador (resp. sustantificador) de peso n, entonces $\mathbf{sA}_1$,$\mathbf{A}_2$, ...,$\mathbf{A}_n$ es una relación (resp, un *término*) en $\mathbb{T}$.

CF5. Si **A** y **B** son relaciones en una teoría $\mathbb{T}$, entonces $\Longrightarrow$**AB** es una relación en $\mathbb{T}$.

....

3.1 2. TEOREMAS

Desde ahora, si **A** es una relación, en lugar de $\rceil$**A** escribiremos **no**(**A**). Si **A** y **B** son relaciones, escribiremos **A o B** en lugar de $\vee$**AB;** y **A** $\Longrightarrow$ **B** en lugar de $\Longrightarrow$**AB.**

3.2 AXIOMAS

Ya se ha visto que los signos específicos determinan los términos y las relaciones en una teoría $\mathbb{T}$.Para construir $\mathbb{T}$, se procederá como sigue:

(1) Primero escribiremos abajo un cierto número de relaciones en $\mathbb{T}$; que se denominan *axiomas explícitos de* $\mathbb{T}$. Las letras que aparecen en los *axiomas explícitos* de $\mathbb{T}$ se llaman las *constantes* de $\mathbb{T}$.

(2) Se dan una o más reglas llamadas *los esquemas de* $\mathbb{T}$, que deben tener las siguientes propiedades: (a) la aplicación de una regla, da lugar a una relación en $\mathbb{T}$, (b) si T es un término en $\mathbb{T}$, si x es una letra, y si R es una relación en $\mathbb{T}$ construída por aplicación de un esquema, entonces la relación $(T/x)R$ puede ser construída aplicando el anterior esquema.

Cada relación construída aplicando un esquema de $\mathbb{T}$ se llama *axioma implicito de* $\mathbb{T}$.

Intuitivamente, los axiomas representan afirmaciones evidentes en sí, o hipótesis de los que uno desea obtener consecuencias . Las constantes representan objetos bien definidos para los que las propiedades expresadas por los axiomas explícitos se suponen que son verdaderas. Por otro lado, si la letra x no es una constante, representa un objeto completamente indeterminado; si una propiedad del objeto x se asume que es verdadera por medio de un axioma, entonces este axioma es necesariamente implícito , así que la propiedad permanece verdadera para cualquier objeto T.

PRUEBAS

Un *texto demostrativo* en una teoría $\mathbb{T}$, comprende:

(1) Una *construcción formativa auxiliar* de relaciones y términos en $\mathbb{T}$.

(2) Una *prueba en* $\mathbb{T}$, esto quiere decir, una sucesión de relaciones en $\mathbb{T}$, que aparecen en la construcción formativa auxiliar , tal que para cada relación R en la sucesión al mneos una de las siguientes condiciones es satisfecha:

(a_1) R es un axioma explícito de $\mathbb{T}$

(a_2) R resulta de una aplicación de une squema de $\mathbb{T}$ a términos o relaciones que aparecen en la construcción formativa auxiliar.

(b) Existen dos relaciones S , T en la sucesión que preceden a R, tal que T es $S \Longrightarrow R$.

Un *teorema en* $\mathbb{T}$ es una relación que aparece en una *prueba en* $\mathbb{T}$.

Esta noción es esencialmente dependiente del estado de la teoría bajo consideración, y el momento en que está siendo descrita. Una relación en una teoría $\mathbb{T}$ llega a ser teorema en $\mathbb{T}$ cuando se tiene éxito en insertarlo en una prueba en $\mathbb{T}$. Decir que una relación "*no es un teorema de* $\mathbb{T}$" no tiene significado alguno si no se hace referencia al estado de desarrollo de la teoría $\mathbb{T}$.

Un teorema en $\mathbb{T}$ se llama también una "relación *verdadera en* $\mathbb{T}$" (o "proposición", "lema", "corolario", etc.).

Si R es una relación en $\mathbb{T}$, x una letra y T un término en $\mathbb{T}$; y si $(T \mid x)R$ es un teorema en $\mathbb{T}$,se dice que T satisface la relación R en $\mathbb{T}$ (o se tiene una solución de R), donde R se considera como una relación en R.

Una relación se dice *falsa* en $\mathbb{T}$ si su negación es un teorema en $\mathbb{T}$. Una teoría $\mathbb{T}$ se dice *contradictoria* cuando se obtiene una relación que es a la vez verdadera y falas en $\mathbb{T}$.

De nuevo acá, estamos desarrollando una noción que depende del estado de desarrollo particular de una teoría. El lector puede llegar a confundirse (desafortunadamente sugerido por el significado intuitivo de a palabra "falso") que consiste en creer que , una vez que uno ha probado que una relación R es falsa en $\mathbb{T}$, se tiene establecido que R "*no es verdadera en* $\mathbb{T}$". (Estrictamente hablando, esta frase no tiene significado preciso en matemáticas, como se ha remarcado lineas arriba).

- En lo que sigue, se dará criterios metamatemáticos, llamados *criterios deductivos,* que nos ayudarán a acortar las pruebas. Estos criterios se denotarán por la letra C seguido de un número. Las demostraciones se detallan en el texto base.

- C1 (Silogismo) *Sean A* y *B relaciones en una teoría* $\mathbb{T}$. *Si A* y *$A \Longrightarrow B$ son teoremas en* $\mathbb{T}$ *,entonces B es un teorema en* $\mathbb{T}$.

- C2 *Sea A un teorema en una teoría* $\mathbb{T}$ *,sea T un término de* $\mathbb{T}$ *; y sea x una letra. Entonces $(T \mid x)A$ es un teorema en la teoría $(T \mid x)\mathbb{T}$.*

- C3 *Sea A un teorema de una teoría* $\mathbb{T}$ *, sea T un término de* $\mathbb{T}$ *, y sea x una letra que no es constante de* $\mathbb{T}$ *, entonces $(T \mid x)A$ es un teorema de* $\mathbb{T}$.

COMPARACIÓN DE TEORÍAS

Una teoría $\mathbb{T}^*$ se dice que es *más fuerte* que otra teoría $\mathbb{T}$, si todos los signos de $\mathbb{T}$ son signos de $\mathbb{T}^*$, si todos los axiomas explícitos de $\mathbb{T}$ son teoremas de $\mathbb{T}^*$, y todos los esquemas de $\mathbb{T}$, son esquemas de $\mathbb{T}^*$.

- C4 Si una teoría $\mathbb{T}^*$ es *más fuerte* que otra teoría $\mathbb{T}$, entonces todos los teoremas de $\mathbb{T}$ son teoremas de $\mathbb{T}^*$.

(La teoría de grupos es más fuerte que la teoría de conjuntos, entonces podemos aplicar los resultados de la teoría de conjuntos a la teoría de grupos).

3.3 3. TEORÍAS LÓGICAS

1. LOS AXIOMAS

Una *teoría lógica* es cualquier teoría $\mathbb{T}$ en las que los esquemas $S1$ a $S4$ que se indican abajo,proveen los axiomas implícitos.

S1. Si A es una relación en $\mathbb{T}$, la relación $(A \circ A) \Longrightarrow A$ es un axioma de $\mathbb{T}$.

S2. Si A y B son relaciones en $\mathbb{T}$, la relación $A \Longrightarrow (A \circ B)$ es un axioma de $\mathbb{T}$.

S3. Si A y B son relaciones en $\mathbb{T}$, la relación $(A \circ B) \Longrightarrow (B \circ A)$ es un axioma de $\mathbb{T}$.

S4. Si A , B y C son relaciones en $\mathbb{T}$, la relación

$$(A \Longrightarrow B) \Longrightarrow ((C \circ A) \Longrightarrow (C \circ B))$$

es un axioma de $\mathbb{T}$.

Intuitivamente, las reglas S1 hasta S4 básicamente expresan el significado que se da a las palabras " $\circ$ " e "*implica*" *en el lenguaje usual de las matemáticas.*

En el lenguaje cotidiano, la palabra " $\circ$ " tiene dos significados diferentes, de acuerdo al contexto: cuando relacionamos dos afirmaciones por la palabra " $\circ$ ", podemos querer significar que afirmamos que ocurre al menos una de las dos (o posiblemente ambas), o que ocurre solo una de ellas con exclusión de la otra.

Si una teoría lógica es *contradictora, toda relación en* $\mathbb{T}$ *es un teorema en* $\mathbb{T}$. Pues si A es una relación tal que A y "noA" son teoremas de $\mathbb{T}$, y sea B cualquier relación de $\mathbb{T}$. Por $S2$

$$(noA) \Longrightarrow (noA) \circ B$$

es un teorema de $\mathbb{T}$; entonces por $C1$, $(noA) \circ B$, que equivale a decir que $A \Longrightarrow B$ es un teorema en $\mathbb{T}$. Una segunda aplicación de $C1$ nos muestra que B es un teorema en $\mathbb{T}$.

2. PRIMERAS CONSECUENCIAS

C6. Si A , B y C son relaciones en $\mathbb{T}$, si $A \Longrightarrow B$ y $B \Longrightarrow C$ son teoremas en $\mathbb{T}$, entonces $A \Longrightarrow C$ es un teorema en $\mathbb{T}$.

C7. Si A y B son relaciones en $\mathbb{T}$, entonces $B \Longrightarrow (A \circ B)$ es un teorema en $\mathbb{T}$.

C8. Si A es una relación en $\mathbb{T}$, $A \Longrightarrow A$ es un teorema en $\mathbb{T}$.

C9. Si A es una relación en $\mathbb{T}$ y B un teorema en $\mathbb{T}$, entonces $A \Longrightarrow B$ es un teorema en $\mathbb{T}$.

C10. Si A es una relación en $\mathbb{T}$, entonces $A \circ (noA)$ es un teorema en $\mathbb{T}$.

C11. Si A es una relación en $\mathbb{T}$, entonces $A \Longrightarrow (no\ noA)$ es un teorema en $\mathbb{T}$.

C12. Si A y B son relaciones en $\mathbb{T}$, entonces la relación

$$(A \Longrightarrow B) \Longrightarrow ((noB) \Longrightarrow (noA))$$

es un teorema en $\mathbb{T}$.

C13. Si A , B y C son relaciones en $\mathbb{T}$, si $A \Longrightarrow B$ es un teorema en $\mathbb{T}$, entonces

$$(B \Longrightarrow C) \Longrightarrow (A \Longrightarrow C)$$

es un teorema en $\mathbb{T}$.

3.4 METODOS DE PRUEBA

I. MÉTODO DE LA HIPÓTESIS AUXILIAR

C14. (Criterio de deducción). Si A es una relación en $\mathbb{T}$ y $\mathbb{T}^*$ la teoría obtenida al adjuntar A a los axiomas de $\mathbb{T}$. Si B es un teorema en $\mathbb{T}^*$, entonces $A \Longrightarrow B$ es un teorema en $\mathbb{T}$.

En la práctica, indicamos que haremos uso de este criterio cuando empleamos la frase "supongamos que A es verdad". Esta frase significa que en lo que sigue el razonamiento será realizado en la teoría $\mathbb{T}^*$, h*asta que la relación B sea probada. Cuando esto ha sido logrado, queda establecido que* $A \Longrightarrow B$ *es un teorema de* $\mathbb{T}$; *y uno va a continuar entonces su razonamiento en* $\mathbb{T}$, *sin indicar explícitamente que ha abandonado la teoría* $\mathbb{T}^*$.

La relación A introducida como un nuevo axioma se llama *hipótesis auxiliar.* Por ejemplo, cuando decimos "*sea x un número real*" , estamos estableciendo una teoría en la cual la relación "*x un número real*" , es una hipótesis auxiliar.

II. MÉTODO DE REDUCCIÓN AL ABSURDO

C15. Si A es una relación en $\mathbb{T}$ y $\mathbb{T}^*$ la teoría obtenida al adjuntar noA a los axiomas de $\mathbb{T}$. Si $\mathbb{T}^*$ es contradictoria, entonces A es un teorema en $\mathbb{T}$.

En la práctica, indicamos que haremos uso de este criterio por el empleo de una frase tal como "supongamos que A es falsa" . Esta frase significa que el razonamiento que sigue será realizado en la teoría $\mathbb{T}^*$, hasta que dos teoremas de la forma B y noB sean probados. Cuando esto sea realizado, está establecido que A es un teorema en $\mathbb{T}$; lo cual generalmente se indica por una frase tal como "*como B* y *noB es absurdo, entonces A es verdadera". Y luego se continúa en la teoría original* $\mathbb{T}$.

Como consecuencia del empleo de los métodos anteriores, es posible establecer los siguientes criterios:

C16. Si A es una relación en $\mathbb{T}$, entonces $(no\ noA) \Longrightarrow\ A$ es un teorema en $\mathbb{T}$.

C17. Si A y B son relaciones en $\mathbb{T}$, entonces

$$((noB) \Longrightarrow (noA)) \Longrightarrow (A \Longrightarrow B)$$

es un teorema en $\mathbb{T}$.

III. MÉTODO DE DISJUNCIÓN DE CASOS.

C18. Si A , B y C son relaciones en $\mathbb{T}$, si $A{\circ}B$, $(A \Longrightarrow C)$, $(B \Longrightarrow C)$ son teoremas en $\mathbb{T}$, entonces C es un teorema en $\mathbb{T}$.

Para probar C es suficiente que cuando tenemos a nuestra disposición un teorema " $A \circ B$" , probar primero C adjuntando A a los axiomas de $\mathbb{T}$, y luego probar C adjuntando B a los axiomas de $\mathbb{T}$. El hecho interesante de este método descansa en que si " $A \circ B$" es verdad, no podemos en general afirmar que A es verdad o que B es verdad.

En particular, por el C10, si $(A \Longrightarrow C)$ y $(noA \Longrightarrow C)$ son ambos teoremas en $\mathbb{T}$, entonces C es un teorema en $\mathbb{T}$.

IV. MÉTODO DE LA CONSTANTE AUXILIAR

C19. Sea x una letra y sean A y B relaciones en $\mathbb{T}$ tal que:

(1) la letra x no es una constante de $\mathbb{T}$ y no aparece en B.

(2) Hay un término t en $\mathbb{T}$ tal que $(t \mid x)A$ es un teorema en $\mathbb{T}$.

Sea $\mathbb{T}^*$ la teoría obtenida al adjuntar A a los axiomas de $\mathbb{T}$, si B es un teorerma en $\mathbb{T}^*$, entonces B es un teorema en $\mathbb{T}$.

Intuitivamente. este métdo consiste en usar, con el objetivo de probar B, un objeto arbitrario x (la constante auxiliar) *que se supone posee o está dotado de la propiedad o propiedades denotadas por A.Por ejemplo, en una prueba en geometría que envuelve, entre otras cosas, una linea D , podemos "tomar" un punto x sobre esta linea; la relación A es entonces $x \in D$. Para que uno pueda ser capaz de usar un objeto dotado de ciertas propiedades durante el transcurso de una prueba, es claramente necesario que tales objetos deben existir. El teorema $(t \mid x)A$, denominado* teorema de legitimación *, garantiza esta existencia.*

En la práctica indicamos que emplearemos este método por una frase tal como " sea x un objeto tal que A" .

Por constraste con el método de la hipótesis auxiliar , la conclusión del argumento no envuelve a la laetra x.

4. CONJUNCION

Sean A y B fórmulas. La fórmula

$$no(\ (noA) \circ (noB)\ )$$

se denotará por $A\ y\ B$.

CF9. Si A y B son relaciones en $\mathbb{T}$, $A\ y\ B$ es una relación en $\mathbb{T}$, que se llama la *conjunción* de A y B.

C20. Si A y B son teoremas en $\mathbb{T}$, $A\ y\ B$ es un teorema en $\mathbb{T}$.

C21. Si A y B son relaciones en $\mathbb{T}$, entonces

$$(A\ y\ B) \Longrightarrow A \quad , \qquad (A\ y\ B) \Longrightarrow B$$

son teoremas en $\mathbb{T}$.

5. EQUIVALENCIA

Sean A y B fórmulas. La fórmula

$$(A \Longrightarrow B)\ \ y\ \ (B \Longrightarrow A)$$

la denotaremos por $A \Longleftrightarrow B$.

Si $A \Longleftrightarrow B$ *es un teorema en* $\mathbb{T}$, *diremos que* A y B *son equivalentes en* $\mathbb{T}$. Si x *es una letra que no es una constante de* $\mathbb{T}$, *y si* A y B *se consideran como relaciones en* x, *entonces cada término en* $\mathbb{T}$ *que satisface una también satisface la otra.*

Para probar en $\mathbb{T}$ *un teorema de la forma* $A \Longleftrightarrow B$, *es necesario y suficiente probar* $A \Longrightarrow B$ y $B \Longrightarrow A$ en $\mathbb{T}$. *Esto generalmente se hace probando* B *en la teoría deducida de* $\mathbb{T}$ *al adjuntar como axioma la relación* A, *y luego probar* A *en la teoría deducida de* $\mathbb{T}$ *al adjuntar como axioma la relación* B .

C22. Si A , B y C son relaciones en $\mathbb{T}$. Si $A \Longleftrightarrow B$ es un teorema en $\mathbb{T}$, $B \Longleftrightarrow A$ es un teorema en $\mathbb{T}$. Si $A \Longleftrightarrow B$ y $B \Longleftrightarrow C$ son teoremas en $\mathbb{T}$, entonces $A \Longleftrightarrow C$ es un teorema en $\mathbb{T}$.

C23. Si A y B son relaciones equivalentes en $\mathbb{T}$, y C es una relación en $\mathbb{T}$; entonces los sigueintes son teoremas en $\mathbb{T}$.

$$\begin{aligned}
noA &\Longleftrightarrow noB \\
(A &\Longrightarrow C) \Longleftrightarrow (B \Longrightarrow C) \\
(C &\Longrightarrow A) \Longleftrightarrow (C \Longrightarrow B) \\
(A\ y\ C) &\Longleftrightarrow (B\ y\ C) \\
(A \circ C) &\Longleftrightarrow (B \circ C)
\end{aligned}$$

C24. Si A , B y C son relaciones en $\mathbb{T}$. Los siguientes son teoremas en $\mathbb{T}$.

$$\begin{aligned}
(no\ noA) &\iff A \quad ; \quad (A \Longrightarrow B) \iff (\ (no\ B) \Longrightarrow (no\ A)\ ) \\
(A\ \ y\ \ A) &\iff A\ ;\ (A\ \ y\ \ B) \iff (B\ \ y\ \ A) \\
(A\ y\ (B\ y\ C)) &\iff ((A\ y\ B)\ y\ C) \quad ; \quad (A \circ A) \iff A \\
(A \circ B) &\iff no((no\ A)\ y\ (no\ B)\ ) \\
(A\ y\ (B\ \circ\ C)) &\iff ((A\ y\ B) \circ (A\ y\ C) \\
(A \circ\ (B\ y\ C)) &\iff ((A\ \circ\ B)\ y\ (A\ \circ\ C) \\
(A\ y\ (no\ B)) &\iff no\ (A \Longrightarrow B)
\end{aligned}$$

C25. Si A es un teorema en $\mathbb{T}$ y B es una relación en $\mathbb{T}$, entonces $(A\, y\, B) \iff B$ es un teorema en $\mathbb{T}$.

Si $(no\ A)$ es un teroema en $\mathbb{T}$, entonces $(A \circ B) \iff B$ es un teroema en $\mathbb{T}$.

3.5 4. TEORÍAS CUANTIFICADORAS

Los únicos signos lógicos que juegan un papel en todo lo anterior son $\rceil$ y $\vee$ ("*no*" *y* " $\circ$ "). Las reglas que ahora estableceremos conciernen esencialmente al uso de los signos τ y $\Box$.

Si R es una fórmula y x una letra, la fórmula $(\tau_x(R) \mid x)R$ se denota por "*existe un x tal que R*" , o por $(\exists x)R$. La fórmula

$$"no\ ((\exists x)\ no\ R)"$$

se denota por "*para todo x , R* ", o por "*dado cualquier x, R*", o por $(\forall x)R$
.

Los símbolos abreviadores $\exists$ y $\forall$ de denominan respectivamente *el cuantificador existencial* y el *cuantificador universal . La letra x* no aparece en la fórmula denotada por $\tau_x(R)$ y por lo tanto no aparece en las fórmulas denotadas por $(\exists x)R$ y $(\forall x)R$.

CF11. Si R es una relación en una teoría $\mathbb{T}$ y si x es una letra, entonces $(\exists x)R$ y $(\forall x)R$ son relaciones en $\mathbb{T}$.

Intuitivamente, vamos a considerar R como expresando una propiedad de un objeto denotado por x. Del significado intuitivo del término $\tau_x(R)$, la afirmación $(\exists x)R$ significa que hay o existe un objeto que tiene la propiedad R. La afirmación "no $((\exists x)$ no $R)$" significa que no hay un objeto que tenga la propiedad "no R", y entonces todo objeto tiene la propiedad R.

C26. Sea $\mathbb{T}$ una teoría lógica , sea R una relación en $\mathbb{T}$, y sea x una letra. Las relaciones $(\forall x)R$ y $(\tau_x(noR) \mid x)R$ son entonces equivalentes en $\mathbb{T}$.

Porque $(\forall x)R$ es idéntico a *no* $((\exists x)$ *no* $R)$, que es lo mismo que

$$no\ (\tau_x(no\ R) \mid x)(no\ R)$$

que es idéntico a *no no* $(\tau_x(no\ R) \mid x)(R)$, que es equivalente a $(\tau_x(noR) \mid x)R$

C27. Si R es un teorema en una teoría lógica $\mathbb{T}$ en la que la letra x no es una constante, entonces $(\forall x)R$ es un teorema en $\mathbb{T}$.

Por otro lado, en el caso de que x es una constante de T, la verdad de R no implica que tambien lo es $(\forall x)R$ .Intuitivamente, el hecho de que R es una propiedad de x verdadera; (que se cumple para x), que es un objeto definido de T, claramente no implica que R sea una propiedad verdadera (o se cumpla) para todo objeto.

C28. Sea $\mathbb{T}$ una teoría lógica, sea R una relación en $\mathbb{T}$, y sea x una letra. Entonces las relaciones

$$\text{"}no\ (\forall x)R\text{"} \quad y \quad (\exists x)\ no\ R$$

son equivalentes en $\mathbb{T}$.

Pues "*no* $(\forall x)R$" es idéntico con *no no* $((\exists x)$ *no* $R)$; lo que es equivalente a $(\exists x)$ *no* R.

3.5.1 2. AXIOMAS DE LAS TEORÍAS CUANTIFICADORAS

Una teoría cuntificadora $\mathbb{T}$ es cualquier teoría en la que los esquemas $S1$a $S4$ y el esquema $S5$ siguiente proveen los axiomas implícitos.

S5. Si R es una relación en $\mathbb{T}$, si t es un término en $\mathbb{T}$, y si x es una letra, entonces la relación

$$(t \mid x)R \Longrightarrow (\exists x)\ R$$

es un axioma.

El esquema $S5$ dice que si hay un objeto t para el cual la relación R, considerada como expresando una propiedad de x, es verdadera ; entonces R es verdadera para el objeto $\tau_x(R)$; que está de acuerdo con el significado intuitivo que hemos atribuído a $\tau_x(R)$.

3.5.2 3. PROPIEDADES DE LOS CUANTIFICADORES

C29. Si R es una relación en $\mathbb{T}$ y x es una letra, entonces las relaciones

$$no\ (\exists x)\ R \quad y \quad (\forall x)\ no\ R$$

son equivalentes en $\mathbb{T}$.

Nota: *los criterios $C28$ y $C29$nos permiten deducir propiedades de uno de los cuantificadores a partir de las propiedades del otro .*

C30. Si R es una relación en $\mathbb{T}$, sea t un término en $\mathbb{T}$ y x es una letra, entonces la relación

$$(\forall x)\ R \Longrightarrow (t \mid x)R$$

es un teorema en $\mathbb{T}$.

C31. Si R y S son relaciones en $\mathbb{T}$, y x una letra que no es una constante de $\mathbb{T}$. Si $R \Longrightarrow S$, (respectivamente $R \Longleftrightarrow S$) es un teorema en $\mathbb{T}$, entonces

$$\begin{array}{rcccl} & (\forall x)\ R & \Longrightarrow & (\forall x)\ S & ,\ (\exists x)\ R \Longrightarrow (\exists x)\ S \\ \text{resp.} & (\forall x)\ R & \Longleftrightarrow & (\forall x)\ S & ,\ (\exists x)\ R \Longrightarrow (\exists x)\ S \end{array}$$

son teoremas en $\mathbb{T}$.

C32. Si R y S son relaciones en $\mathbb{T}$, y x una letra. Entonces las relaciones

$$(\forall x)\ (R\ y\ S) \iff (\forall x)\ R\ \ y\ \ (\forall x)\ S$$
$$(\exists x)\ (R\ \circ\ S) \iff (\exists x)\ R\ \circ\ (\exists x)\ S$$

son teoremas en $\mathbb{T}$.

C34. Sea R una relación y sean x , y letras. Entonces las relaciones

$$(\forall x)(\forall y)\ R \iff (\forall y)(\forall x)\ R$$
$$(\exists x)(\exists y)\ R \iff (\exists y)(\exists x)\ R$$
$$(\exists x)(\forall y)\ R \iff (\forall y)(\exists x)\ R$$

son teoremas en $\mathbb{T}$.

Si $(\forall y)(\exists x)\ R$ es un teorema en $\mathbb{T}$, no podemos conluir que $(\exists x)(\forall y)\ R$ sea un teorema en $\mathbb{T}$. Intuitivamente, decir que la relación $(\forall y)(\exists x)\ R$ es verdad significa que, dado cualquier objeto y, existe un objeto x tal que R es una relación verdadera con los objetos x , y. Pero, en general el objeto x dependerá de la elección del objeto y.Mientras decir que $(\exists x)(\forall y)\ R$ es verdadera significa que hay un **objeto fijo** x tal que R es una relación verdadera con este objeto y **cualquier** objeto y.

3.5.3 4. CUANTIFICADORES TIPIFICADOS

Si A y R son fórmulas y x una letra. Denotaremos la fórmula

$$(\exists x)\ (A\ y\ R) \quad \text{por} \quad (\exists_A x)\ R$$

y la fórmula

$$no\ (\exists_A x)(no\ R) \quad \text{por} \quad (\forall_A x)\ R$$

los símbolos abreviados $\exists_A$ y $\forall_A$ se denominan *cuantificadores tipificados*

.

CF12. Si A y R son relaciones en $\mathbb{T}$, y x una letra. Entonces

$$(\exists_A x)\ R \qquad y \qquad (\forall_A x)\ R$$

son relaciones en $\mathbb{T}$.

Intuitivamente, consideremos A y R como expresando propiedades de x. Puede ocurrir que en una serie de pruebas, nos referimos o trabajamos únicamente con objetos que satisfacen A. Decir que existe un objeto satisfaciendo A tal que R significa que existe un objeto tal que "A y R"; que es la definición de $\exists_A$. Decir que todos los objetos que satisfacen A tienen la propiedad R significa que no existen objetos satisfaciendo A tal que "*no* R"; de ahí la definición de $\forall_A$. En la práctica, estos signos son reemplazados por varias frases dependiendo de la naturaleza de la relación A. Por ejemplo: " *para todos los enteros* x , R"; "*existe un elemento* x *del conjunto* E *tal que* R"; y así por el estilo.

C35. Si A y R son relaciones en $\mathbb{T}$ y sea x una letra. Entonces las relaciones

$$(\forall_A x)\ R \quad y \quad (\forall x)(A \Longrightarrow R)$$

son equivalentes en $\mathbb{T}$.

Las propiedades de los cuantificadores tipificados son análogas a las de los cuantificadores

C38. Si A y R son relaciones en $\mathbb{T}$ y sea x una letra. Entonces las relaciones

$$\begin{aligned} no\ (\forall_A x)\ R &\iff (\exists_A x)\ noR \\ no\ (\exists_A x)\ R &\iff (\forall_A x)(no\ R) \end{aligned}$$

son teoremas en $\mathbb{T}$.

C42. Sean A , B , R relaciones en $\mathbb{T}$ y sean x , y letras. Si x no aparece en B, si y no aparece en A, entonces las relaciones

$$\begin{aligned} (\forall_A x)(\forall_B y)(R) &\iff (\forall_B y)(\forall_A x)(R) \\ (\exists_A x)\ (\exists_B y)\ R &\iff (\exists_B y)(\exists_A x)\ R \\ (\exists_A x)(\forall_B y)\ R &\Longrightarrow (\forall_B y)(\exists_A x)\ R \end{aligned}$$

son teoremas en $\mathbb{T}$.