Teoría de Conjuntos

(una introducción)

Fernando Hernández Hernández

Contenido

Prefacio **vii**

1 Introducción Histórica **1**

2 Axiomas de la Teoría de Conjuntos **7**
2.1 Propiedades 7
2.2 Los Axiomas 9

3 Álgebra de Conjuntos **23**
3.1 Operaciones Fundamentales 23
3.2 Producto Cartesiano 29
3.3 Familias de Conjuntos 34

4 Relaciones y Funciones **43**
4.1 Relaciones 43
4.2 Funciones 49
4.3 Productos Cartesianos Arbitrarios 63
4.4 Equivalencias y Particiones 69
4.5 Órdenes 77
4.6 Sobre Clases 92

5 Los Números Naturales **95**
5.1 Introducción 95
5.2 Propiedades de los Números Naturales 100
5.3 El Teorema de Recursión 105
5.4 Aritmética de los Números Naturales 111

6 La Extensión de los Naturales a los Reales **119**
6.1 Diferencias 119
6.2 Los Enteros 122
6.3 Los Racionales 126
6.4 Sucesiones de Cauchy de Números Racionales 132

6.5 Los Reales 138

7 Cardinalidad 149
7.1 Introducción 149
7.2 Conjuntos Finitos 150
7.3 Cardinalidad en Conjuntos Infinitos 154
7.4 Conjuntos Numerables 156
7.5 Números Cardinales 161
7.6 Aritmética Cardinal 164
7.7 El Continuo 169

8 El Axioma de Elección 175
8.1 Introducción 175
8.2 El Axioma de Elección 177
8.3 Cuatro Equivalencias Importantes 181
8.4 Uso del Axioma de Elección 188
8.5 El Teorema del Ideal Primo 199
8.6 Otras Proposiciones Relacionadas. 210
8.7 Matemáticas sin Elección. 214

9 Ordinales 217
9.1 Introducción 217
9.2 Números Ordinales 218
9.3 El Axioma de Reemplazo 222
9.4 Inducción y Recursión Transfinita 227
9.5 Aritmética Ordinal 232
9.6 Ordinales Iniciales y Alephs 245
9.7 Suma y Multiplicación de Alephs 250

10 Teoría de Cardinales 255
10.1 Números Cardinales y el Axioma de Elección 255
10.2 Sumas y Productos Infinitos 260
10.3 Cardinales Regulares y Singulares 266
10.4 La Hipótesis Generalizada del Continuo 271
10.5 La HGC y los Números Cardinales 275
10.6 Medidas y Cardinales 281
10.7 Cardinales Medibles 286
10.8 Otros Cardinales Grandes 288

11 Dos Tópicos Especiales **297**
11.1 El Problema de Souslin 297
11.2 El Axioma de Martin 301
11.3 Equivalencias del Axioma de Martin 312

A Axiomas de Zermelo-Fraenkel **319**

B Axiomas Bernays-Gödel **321**

C Axiomas Adicionales **323**

Bibliografía **329**

Índice **337**

Teoría de Conjuntos

Cada cuerpo tiene
su armonía y
su desarmonía

en algunos casos
la suma de armonías
puede ser casi
empalagosa

en otros
el conjunto
de desarmonías
produce algo mejor
que la belleza

Mario Benedetti

Viento del Exilio

Prefacio

Casi todos los libros de matemáticas hablan de conjuntos y están libremente salpicados de extraños símbolos como $\in$, $\subseteq$, $\cup$, $\cap$, $\emptyset$. P. R. Halmos apunta en el ya clásico *Naive Set Theory*: "Los matemáticos están de acuerdo en que cada uno de ellos debe saber algo de Teoría de Conjuntos; el desacuerdo comienza al tratar de decidir qué tanto es *algo".* Hay motivos bien fundamentados detrás de esta obsesión por los conjuntos. La Teoría de Conjuntos es un lenguaje. Sin ella, no sólo es imposible hacer matemáticas, sino que ni siquiera podemos decir de qué se trata ésta. Es lo mismo que intentar estudiar literatura francesa sin saber algo de francés. Hewitt y Stromberg en su libro *Real and Abstract Analysis* dicen: "Desde el punto de vista de un lógico, las matemáticas son la Teoría de Conjuntos y sus consecuencias".

La Teoría Intuitiva de Conjuntos funciona bien para los primeros cursos de matemáticas (Cálculo, Álgebra, entre otros), pero definitivamente para los cursos de matemáticas superiores es muy conveniente contar con una Teoría de Conjuntos sólida pues, de hecho, nociones como las de cardinalidad o aplicaciones del Axioma de Elección son fundamentales y, en ocasiones, indispensables en tópicos especializados del Análisis, Álgebra, Topología, etc.

En este texto se presenta la Teoría de Conjuntos basada en la Axiomática de Zermelo-Fraenkel con elección (**ZFC**) tratando de requerir el mínimo de formalismo lógico. Una justificación para optar por la axiomatización de Zermelo-Fraenkel (**ZF**) es que ésta es la más apropiada para un primer encuentro con la Teoría de Conjuntos y lo más importante es que, como veremos, los números reales, sus operaciones aritméticas y las demostraciones de sus propiedades pueden ser expresados a partir de los axiomas de Zermelo-Fraenkel. Pero no sólo el sistema de los números reales encuentra sustento en la Axiomática de Zermelo-Fraenkel, la mayor parte de las matemáticas contemporáneas (posiblemente la única excepción es la Teoría de Categorías) puede desarrollarse dentro de la Teoría de Conjuntos así axiomatizada. Por ejemplo, los objetos fundamentales de Topología, Álgebra o Análisis (espacios topológicos, espacios vectoriales, grupos, anillos, espacios de Banach) son apropiadamente definidos como conjuntos de una clase específica. Propiedades topológicas, algebraicas o analíticas de estos objetos son entonces derivadas a partir de las propiedades de conjuntos, las cuales se pueden obtener usando los axiomas **ZFC**. En este sentido, la Teoría de Conjuntos así axiomatizada sirve como una fundamentación satisfactoria para otras ramas de la matemática.

Una consulta rápida al contenido analítico será suficiente para enterarse de cuál es el material que se expone en este texto y cómo está organizado este material. Sin embargo, son convenientes algunos comentarios. En primer lugar, en el Capítulo 2, la noción de propiedad se da de manera intuitiva y se introducen los primeros axiomas del sistema **ZF**. En el Capítulo 6, la extensión de los números racionales a los números reales se hace estableciendo clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy, en lugar del método clásico que utiliza cortaduras de Dedekind (que también se expone brevemente en el Capítulo 11). El Capítulo 8, que trata del Axioma de Elección, contiene mucha información, en especial, las Secciones 8.4 y 8.5 incluyen ejemplos que posiblemente no sean accesibles a todos los lectores; en particular, las demostraciones de éstos están destinadas a aquellos lectores con mayor conocimiento y madurez matemática. El propósito de incluir toda esta información es el de mostrar las vastas aplicaciones de dicho axioma en diversas áreas de la Matemática. La exposición del material dedicado a los números ordinales se pospone hasta después del Axioma de Elección por considerar a éste más importante, aunque por ello se sacrifique un poco el seguimiento de la exposición de los conceptos de cardinalidad; además de que es necesario dicho axioma en algunas proposiciones importantes que se refieren a números ordinales. El Capítulo 10 contiene tópicos especializados de Teoría de Cardinales y es deseable cubrir la mayor parte de él. Las dos últimas secciones de este capítulo requieren de los conceptos de ideales y filtros (para el caso especial del álgebra Booleana $\mathcal{P}(X)$) expuestos en la Sección 8.5. Por último, el Capítulo 11 puede considerarse optativo, el material que ahí se presenta es para aquellos lectores con mayor interés en la Teoría de Conjuntos o ramas afines como la Topología. Cabe mencionar que las secciones 11.2 y 11.3 están basadas en las notas de clase del curso sobre *forcing* que el Prof. Oleg G. Okunev impartió en la Facultad de Ciencias de la UNAM en el segundo semestre de 1997.

Por lo regular las secciones están seguidas de una lista de ejercicios. En pocas excepciones, los ejercicios no se refieren a los conceptos tratados en el texto. Hay varios tipos de ejercicios, algunos rutinarios y otros más difíciles, los cuales frecuentemente están acompañados con sugerencias para su solución. Los ejemplos en el texto sólo ocasionalmente son desarrollados con todo detalle. La verificación de que un ejemplo tiene las propiedades deseadas se deja como ejercicio (usualmente fácil) para el lector.

El final de una demostración se indica con el símbolo $\blacksquare$. Las definiciones, observaciones, lemas, proposiciones y teoremas de cada capítulo son numerados consecutivamente por un par de números que indican el capítulo y el elemento respectivamente: ver Lema 3.2, significa ver el Lema 2 del Capítulo 3. Para hacer referencia a los ejercicios usaremos una terna de números separados por puntos: Ejercicio 2.3.7, significa ejercicio 7 de la sección 3 del capítulo 2. Los axiomas se numeran consecutivamente a lo largo de todo el texto.

Hay referencias de carácter histórico, pero como es un poco incómodo poner todos los datos de la obra que se esté citando en el lugar donde se realizan los apuntes, en la bibliografía se encuentran algunas segundas referencias. Por otra parte, me parece oportuno indicar la bibliografía básica empleada en la elaboración del material aquí presentado, la cual está integrada por: [E_1], [H_1], [HJ], [J_3], [K_1], [KM], [P_4], [P_5], [R_2], [S_{10}]. A los autores de estos textos es a quien ha de atribuirse lo acertado de las demostraciones presentadas. El mérito (si existe) de este trabajo es la selección, modo de presentación del material, modificación y adaptación de algunas de las demostraciones.

La idea de escribir el presente trabajo tuvo su origen en las notas "Breve Resumen de Introducción a la Teoría de Conjuntos". En estas últimas se basó un seminario que realizamos algunos estudiantes de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP en 1992, el cual fue motivado por la falta de un curso de esta bella teoría. En los años en que han sido usadas las notas originales se observó que requerían de una revisión que las hiciera, hasta donde fuera posible, más entendibles y sobre todo más completas; así, el presente volumen difiere en mucho de las notas originales.

Es mi deseo que este libro sirva a cualquier interesado en las matemáticas; en especial a los estudiantes, para ayudarles a no sentirse confundidos (como en su momento yo lo estuve) por el concepto de conjunto.

Finalmente, y no por ello menos merecido, deseo manifestar mi sincero agradecimiento a todas las personas que de una u otra manera han colaborado en la realización de este libro y que por temor a aburrir al lector con una larga lista de nombres no citaré explícitamente. No obstante, es para mi un placer dar a conocer las personas que me ayudaron a culminar este trabajo y a quienes reitero mi agradecimiento: el Prof. Agustín Contreras Carreto, que pese a sus múltiples ocupaciones hizo un gran esfuerzo por brindarme su apreciable ayuda como el mejor de los amigos; el Prof. Fidel Casarrubias Segura, que me hizo observaciones muy acertadas sobre la manera en que se presentaba el material, que me estimuló en muchas ocasiones y que sobre todo me ha apoyado en tantos momentos difíciles; el Prof. Ángel Tamariz Mascarúa, cuya eficaz revisión mejoró notablemente la exposición del material

aquí presentado y de quien he recibido además de un muy especial apoyo, su confianza. Los comentarios constructivos y críticas de todos ellos fueron muy apreciados; además de que han influido de manera sustancial en la redacción final de este trabajo. Expreso también mi gratitud a mi esposa quien ha sufrido y soportado mis locuras desde que inicié con aquel proyecto de 1992 y que para culminar este trabajo me respaldó a pesar de sentirse desplazada. A mis padres por todo el apoyo y comprensión que de ellos he recibido.

Fernando Hernández Hernández.

1

Introducción Histórica

Puede decirse que en todas las épocas los matemáticos y filósofos han empleado razonamientos de la Teoría de Conjuntos de modo más o menos consciente. Sin embargo, es necesario separar claramente todas las cuestiones relacionadas con la idea de número cardinal (y en particular, la noción de infinito) de aquellas en las que solamente intervienen las nociones de pertenencia e inclusión pues éstas son más intuitivas. Solamente apoyándose en ellas es como se puede fundamentar una teoría de silogismos o axiomas como "el todo es mayor que cualquiera de sus partes".

Para la introducción de la Teoría de Conjuntos es muy útil trabajar con conjuntos concretos cuyos miembros sean objetos reales, pero los conjuntos de interés en matemáticas siempre tienen por miembros objetos abstractos: el conjunto de todos los círculos del plano, el conjunto de todos los puntos sobre una esfera, el conjunto de todos los números, etc.

A finales del siglo XIX ya no hay dificultad alguna en hablar del conjunto de los objetos que poseen tal o cual propiedad; la célebre "definición" dada por el matemático alemán Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918)[1]: "*Se entiende por conjunto a la agrupación en un todo de objetos bien diferenciados de nuestra intuición o nuestra mente*", apenas despertó objeciones en el momento de su publicación. No sucedió así cuando a la noción de conjunto vinieron a unirse las de número y magnitud.

El problema de la divisibilidad de extensión da lugar a dificultades filosóficas considerables; matemáticos y filósofos fracasarían ante la paradoja[2] de una magnitud finita formada por infinitos puntos "sin medida".

Las matemáticas clásicas evitan introducir en sus razonamientos el "infinito actual", es decir, conjuntos formados por una infinidad de elementos simultáneamente existentes, conformándose con el "infinito potencial", que se

---

[1]Profesor de la Universidad de Halle. Publicó sus artículos básicos sobre Teoría de Conjuntos en "Mathematische Annalen" durante los años 1879-1893. Estos artículos fueron editados nuevamente en [C_2]; este volumen contiene también una biografía de Cantor escrita por Zermelo.

[2]Del griego $\pi\alpha\rho\grave{\alpha}\ \delta\grave{o}\xi\alpha$, expectación.

refiere a la posibilidad de aumentar toda magnitud dada. Si bien este punto de vista implicaba una cierta dosis de hipocresía, permitía al menos desarrollar la mayor parte de las matemáticas clásicas, incluyendo la teoría de las proporciones y más tarde el Cálculo Infinitesimal.

Las necesidades del Análisis (en particular el estudio a fondo de las funciones de variables reales que se desarrolla sobre todo durante el siglo XIX) son el origen de lo que iba a convertirse en la moderna Teoría de Conjuntos. Cuando Bolzano, en 1817, demuestra la existencia del extremo inferior de un conjunto de números reales acotado inferiormente, todavía razona, como la mayoría de sus contemporáneos, "en comprensión"; no hablando de un conjunto cualquiera de números reales, sino de una propiedad arbitraria de estos últimos. Pero cuando treinta años más tarde redacta sus *Paradoxien des - Unendlichen* (Paradojas del Infinito), no dudaba en reivindicar el derecho a la existencia del "infinito actual" y en hablar de conjuntos arbitrarios. En este trabajo define la noción general de equipotencia de conjuntos, y demuestra que cualesquiera dos intervalos compactos en $\mathbf{R}$ son equipotentes; observa también que la diferencia fundamental entre conjuntos finitos e infinitos radica en que un conjunto infinito E es equipotente a un subconjunto distinto de E, pero no da ninguna demostración convincente de esta afirmación. Por otra parte, el tono general de esta obra tiene mucho más de filosófico que de matemático, y no pudiendo separar de una forma suficientemente clara la noción de potencia o cardinalidad de un conjunto de la de magnitud y de la de orden de infinitud, fracasa en sus tentativas de formar conjuntos infinitos de potencias cada vez mayores y termina por intercalar en sus razonamientos una serie de consideraciones sobre las series divergentes, totalmente fuera de contexto.

La Teoría de Conjuntos, en el sentido que le damos hoy en día, se debe al genio de Georg Cantor. También él parte del Análisis y, sus estudios sobre las series trigonométricas, inspirados en los trabajos de Riemann (1826-1866), le llevan de modo natural, en 1872, a un primer intento de clasificación de los conjuntos "excepcionales" que aparecen en dicha teoría, mediante la noción de "conjuntos derivados sucesivos" que introduce con este fin. Como consecuencia de estas investigaciones y de su método para definir los números reales, Cantor comienza a interesarse por los problemas de equipotencia, ya que en 1873 hace notar que el conjunto de los números racionales (o el de los números algebraicos) es numerable. En su correspondencia con Dedekind, que da comienzo hacia esta fecha, le vemos plantear el problema de equipotencia entre el conjunto de los números enteros y el conjunto de todos los números reales, que resuelve algunas semanas más tarde. En 1874, Cantor intuye equivocadamente la imposibilidad de una biyección entre $\mathbf{R}$ y $\mathbf{R}^n$ $(n > 1)$. Posteriormente descubre estupefacto que tal correspondencia biunívoca existe.

Una vez en posesión de estos resultados, tan nuevos como sorprendentes, se consagra por entero a la teoría de conjuntos. En una serie de seis memorias publicadas en los Mathematische Annalen entre 1878 y 1884 ataca simultáneamente los problemas de equipotencia, la teoría de conjuntos totalmente ordenados, las propiedades topológicas de $\mathbf{R}$ y $\mathbf{R}^n$, y el problema de la medida. Entre sus manos van deslindándose poco a poco, con una claridad admirable, nociones en apariencia indisolublemente unidas en la concepción clásica del "continuo". Ya en 1880 tiene la idea de iterar "transfinitamente" la formación de "conjuntos derivados", idea genitiva, que fructifica dos años después con la introducción de conjuntos bien ordenados, uno de los descubrimientos más originales de Cantor, que le permite abordar un estudio detallado de los números cardinales y formular el "problema del continuo".

Resultaba totalmente imposible que concepciones tan atrevidas, contrapuestas a una tradición dos veces milenaria, que concluían resultados tan inesperados y de un aspecto tan paradójico, se aceptasen sin resistencia. De hecho, entre los matemáticos influyentes de ese entonces en Alemania, Weiestrass (1815-1897) fue el único en seguir con cierto interés los trabajos de Cantor (que había sido alumno suyo); pero Cantor se encontró con una actitud de oposición empecinada por parte de Schwarz, y sobre todo de Kronecker. La tensión constante engendrada por la oposición a sus ideas, así como los esfuerzos infructuosos realizados para demostrar la hipótesis del continuo, parecen ser las causas de los primeros síntomas de una enfermedad nerviosa cuyos efectos sobre su producción matemática pronto se hicieron notar.

Dedekind, guiado por sus trabajos en Aritmética y sobre todo por la teoría de ideales, llegó a considerar la noción de conjunto ordenado desde un punto de vista más general que Cantor. Mientras que este último se limita a los conjuntos totalmente ordenados, Dedekind ataca el caso general y realiza un estudio profundo de los conjuntos reticulados. Estos trabajos no tuvieron gran audiencia en su momento; sus resultados fueron analizados posteriormente por diversos autores dando lugar a numerosas publicaciones desde 1935. La importancia histórica de los trabajos de Dedekind reside en el hecho de haber constituido uno de los primeros ejemplos de construcción axiomática; sin embargo, las aplicaciones de esta teoría han sido escasas. En contraposición, los primeros resultados de Cantor sobre conjuntos numerables y de la potencia del continuo dieron lugar rápidamente a numerosas e importantes aplicaciones, incluso dentro de las cuestiones más clásicas del Análisis.

Así pues, hacia finales del siglo XIX, las concepciones esenciales de Cantor habían ganado la partida. En esta misma época, se completa la formalización de las matemáticas y el método axiomático fue casi universalmente aceptado. Pero simultáneamente surgía una "crisis de fundamentos" de proporciones considerables que conmovió al mundo matemático durante más de treinta años, y que parecía desquebrajar, no sólo todas las adquisiciones recientes en aquel entonces, sino también las partes más clásicas de la matemática.

En 1899 Cantor observa en una carta a Dedekind que no puede hablarse del "conjunto de todos los conjuntos" sin llegar a una contradicción. En 1905 Russell encontró que la noción del "conjunto de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos" es también contradictoria.

Podría pensarse que tales antinomias aparecían únicamente en regiones periféricas de las matemáticas, caracterizadas por considerar conjuntos de una "magnitud" inaccesible a la intuición. Eran razonamientos tan alejados del uso común de los matemáticos, que a muchos de ellos les parecían simples juegos de palabras. No obstante, estas paradojas insistían en señalar la necesidad de una revisión de las bases de la Teoría de Conjuntos a fin de eliminarlas. Pero si bien había unanimidad en cuanto a la urgencia de esta revisión, enseguida surgieron divergencias en la forma y método de llevarla a cabo. Pese a esto se trató de dar a la Teoría de Conjuntos una base axiomática como se hizo en el caso de la geometría elemental, donde no hay que ocuparse de a qué "cosas" se llama "*conjuntos*" ni de qué significa $x \in y$, sino que enumeren las condiciones impuestas a esta última relación. Naturalmente esta axiomatización se trató de hacer de tal manera que se pudieran abarcar en todo lo posible los resultados de Cantor, teniendo cuidado de evitar la aparición de conjuntos paradójicos.

El primer ejemplo de este tipo de axiomatización fue dado por Zermelo en 1904. En ésta, la introducción de conjuntos "muy grandes" se evita mediante un "axioma de comprensión" que grosso modo plantea que para determinar un conjunto con una propiedad $\mathbf{P}(x)$ es necesario (y suficiente) que $\mathbf{P}(x)$ implique una relación de la forma $x \in A$ para algún conjunto ya existente A. Después aparecieron otras axiomatizaciones de la Teoría de Conjuntos. Citamos principalmente la de Von Neumann mucho más cercana, que la de Zermelo, a la concepción primitiva de Cantor. Cantor había ya propuesto en su correspondencia con Dedekind la distinción de dos tipos de entes para evitar los conjuntos paradójicos: las "multiplicidades" y los "conjuntos" propiamente dichos; caracterizándose los segundos por ser pensados como un objeto único. Esta idea fue precisada por Von Neumann distinguiendo dos tipos de objetos: los "conjuntos" y las "clases". En su sistema (casi totalmente formalizado) las clases a diferencia de los conjuntos, no poden ser colocadas a la izquierda del signo $\in$. Una de las ventajas de este sistema es que rehabilita la noción de "clase universal" empleada por los lógicos del siglo XIX (y que, naturalmente no es un conjunto). Además, la introducción de esquemas de axiomas es sustituida por axiomas convenientes, lo que simplifica el estudio lógico. Bernays y Gödel dieron variantes al sistema de Von Neumann.

La axiomatización de la teoría intuitiva de conjuntos de Cantor no sólo fue en sí misma un acontecimiento muy destacado en los avances de las matemáticas del siglo XX, también estableció que el método axiomático es posiblemente la manera más clara y precisa en la cual se puede dar una representación del conocimiento.

2

Axiomas de la Teoría de Conjuntos

2.1 Propiedades

Comúnmente los conjuntos son introducidos como colecciones de objetos con alguna propiedad común. La noción de propiedad merece un poco de análisis. Algunas propiedades frecuentemente consideradas en la vida diaria son tan vagas que difícilmente son admitidas en las matemáticas. Consideremos, por ejemplo, el "conjunto de todos los borregos gordos"; cabe preguntar ¿qué tan *gordo* es gordo? Si nos muestran algún borrego ¿cómo podemos saber si es gordo o no?

Como otro ejemplo, consideremos el "conjunto" de aquellos números naturales que pueden ser escritos (digamos que con papel y lápiz) en notación decimal. Claramente 0 puede ser escrito. Si un número n puede ser escrito, entonces seguramente el número $n+1$ también puede ser escrito. Por el familiar principio de inducción, cualquier número n puede ser escrito. Pero, ¿conoce o conocerá usted de alguien que pueda escribir el número $10^{10^{10}}$? Este número en notación decimal requiere de un 1 y 10^{10} ceros, que para lograr escribirse requiere de al menos trescientos años de trabajo continuo anotando un cero por segundo.

El problema para admitir a estas propiedades como "buenas" propiedades para definir conjuntos es causado por el significado vago de "puede". Una forma de remediar este tipo de dificultades o algunas otras similares es decir explícitamente qué significa "puede" o ponernos de acuerdo en qué significa "gordo"; por ejemplo, estableciendo que gordo es pesar más de cien kilogramos. Sin embargo, el determinar los elementos de un conjunto sabiendo que son los que satisfacen cierta propiedad, sigue siendo complicado. Para ilustrar esta afirmación, construiremos un "conjunto" en el que será más difícil ponerse de acuerdo en un criterio que permita definir bien el conjunto.

> Se cuenta que en un lejano poblado de un antiguo emirato había un barbero llamado As-Samet, *ducho en afeitar cabezas y barbas, maestro en escamondar sanguijuelas.* Un día el Emir, dándose cuenta de la escasez de barberos en el emirato, dio órdenes de que

> todos los barberos del emirato sólo afeitaran a aquellas personas que no pudieran hacerlo por sí mismas (todas las personas en este pueblo tienen que ser afeitadas, ya sea por el barbero o por ellas mismas). Un cierto día el barbero fue llamado a afeitar al Emir y le contó a éste sus congojas.
>
> — En mi pueblo soy el único barbero. Si me afeito, entonces puedo afeitarme por mí mismo y por lo tanto, no debería afeitarme el barbero de mi pueblo ¡que soy yo! Pero si no me afeito, lo debe hacer un barbero por mí ¡pero no hay allí más barbero que yo!
>
> El Emir pensó que tales razonamientos eran muy profundos, a tal grado que premió al barbero con la mano de la más virtuosa de sus hijas, y el barbero vivió eternamente feliz.

Consideremos como $\mathbf{P}(x)$ la propiedad "el habitante x del pueblo no se afeita a sí mismo (y, por tanto, es afeitado por el barbero)". Sea b el barbero. La cuestión es: ¿b tiene o no la propiedad?, es decir, ¿$\mathbf{P}(b)$ se verifica o no? Si b tiene la propiedad, entonces b no se afeita a sí mismo y es afeitado por el barbero. Pero b es el barbero, así que se afeita a sí mismo. Esto significa que b no tiene la propiedad. Si b no tiene la propiedad, entonces b se afeita a sí mismo y por lo tanto, no es afeitado por el barbero. Como b es el barbero, entonces b no se afeita a sí mismo, así que tiene la propiedad. En conclusión, no sabemos si b tiene o no la propiedad, pues la propiedad $\mathbf{P}(b)$ es cierta y falsa a la vez, es una paradoja, frecuentemente conocida como la paradoja del barbero.

Las propiedades anteriores y otras similares no definen conjuntos; esto es, todos los objetos que gozan de la propiedad no pueden ser coleccionados en un conjunto. Esta observación nos puede llevar a preguntar ¿qué propiedades sí definen conjuntos?. Desafortunadamente, no hay manera de conocer esto, y algunos resultados de lógica, especialmente el llamado Teorema de Incompletitud de Gödel, indican que una respuesta plena es imposible.

Para nosotros, *una propiedad es una proposición tal que para cualquier objeto es posible decidir, sin ambigüedad, si dicho objeto la verifica.* Si un objeto x verifica la propiedad $\mathbf{P}(x)$ decimos que la propiedad es verdadera (V); en caso contrario decimos que la propiedad es falsa (F). Cuando $\mathbf{P}(x)$ es verdadera también decimos que el objeto x tiene la propiedad $\mathbf{P}(x)$.

Desde propiedades arbitrarias $\mathbf{P}(x)$ y $\mathbf{Q}(x)$, podemos formar nuevas propiedades: la conjunción $\mathbf{P}(x) \wedge \mathbf{Q}(x)$, la disyunción $\mathbf{P}(x) \vee \mathbf{Q}(x)$ y la negación de $\mathbf{P}(x)$, $\neg\mathbf{P}(x)$. En cuanto al significado de estas nuevas propiedades generadas por $\mathbf{P}(x)$ y $\mathbf{Q}(x)$ tenemos que: Para que un objeto x verifique la conjunción es necesario que x verifique simultáneamente a cada una de las propiedades que la componen; para que x verifique la disyunción es necesario que x verifique por lo menos una de sus componentes, y para que x verifique la negación de $\mathbf{P}(x)$ es necesario que x no verifique $\mathbf{P}(x)$. Los valores de verdad de estas propiedades pueden ser resumidos por la Tabla 1.

Tabla 1

$P(x)$	$Q(x)$	$P(x) \wedge Q(x)$	$P(x) \vee Q(x)$	$\neg P(x)$
V	V	V	V	F
V	F	F	V	F
F	V	F	V	V
F	F	F	F	V

La propiedad $\neg(\mathbf{P}(x) \wedge \neg\mathbf{Q}(x))$ se abrevia como $\mathbf{P}(x) \Rightarrow \mathbf{Q}(x)$. La propiedad $[\mathbf{P}(x) \Rightarrow \mathbf{Q}(x)] \wedge [\mathbf{Q}(x) \Rightarrow \mathbf{P}(x)]$ se abrevia como $\mathbf{P}(x) \Leftrightarrow \mathbf{Q}(x)$. En la Tabla 2 se exponen los valores de verdad de estas propiedades en términos de los valores de verdad de sus componentes.

Tabla 2

$P(x)$	$Q(x)$	$P(x) \Rightarrow Q(x)$	$P(x) \Leftrightarrow Q(x)$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	V

Una cuantificación existencial es una propiedad de la forma $\exists x\, \mathbf{P}(x)$, donde $\mathbf{P}(x)$ es una propiedad cualquiera conocida como cuantificado y $\exists$ es el cuantificador existencial. La propiedad $\exists x\, \mathbf{P}(x)$ es verdadera si $\mathbf{P}(x)$ es verdadera para al menos un objeto x; de otro modo es falsa. La propiedad $\forall x\, \mathbf{P}(x)$, conocida como cuantificación universal, es una abreviación de la propiedad $\neg(\exists x)\,(\neg\mathbf{P}(x))$.

Abreviaremos con $\forall x \in X,\ \mathbf{P}(x)$ la propiedad $\forall x\,(x \in X \Rightarrow \mathbf{P}(x))$ y denotaremos por $\exists x \in X,\ \mathbf{P}(x)$ a la propiedad $\exists x\,(x \in X \wedge \mathbf{P}(x))$.

Una propiedad puede depender de más de un parámetro. Una propiedad del estilo $\mathbf{P}(x, y, \ldots z)$ tiene varios parámetros (una cantidad finita), y su valor de verdad depende de todos los parámetros.

2.2 Los Axiomas

Como se aseguró en la introducción, el enfoque adoptado para el desarrollo de la Teoría de Conjuntos será axiomático y la manera de realizar esta axiomática será parecida a aquella de la Geometría. Es decir, en nuestra axiomática no examinaremos directamente el significado del término "*conjunto*" —tal y como en Geometría no se examinan los significados de los términos "punto", "recta" y "plano"—; pero a partir de sus axiomas —al igual que en Geometría— se deducen todos los teoremas sin recurrir a los significados intuitivos de los términos primitivos.

Los axiomas tienen su origen en el concepto intuitivo de conjunto, pero el método axiomático asegura que el concepto intuitivo de la palabra "conjunto" no interviene en las demostraciones de teoremas o en definiciones de conceptos conjuntistas.

Las nociones primitivas de la Teoría de Conjuntos son "conjunto", y la relación de pertenencia "ser un elemento de", la cual se simbolizará por $\in$; su negación: x no es un elemento o miembro de y la denotamos con $x \notin y$.[1] Para simplificar la notación usaremos letras mayúsculas para referirnos a conjuntos. En ocasiones (cuando sea posible) indicaremos la jerarquía de un conjunto denotándolo con letras caligráficas.

Ahora empezaremos a dar nuestro sistema axiomático. Intentaremos aclarar el significado intuitivo de cada axioma.

Para dar sustancia a la discusión, el primer axioma que adoptaremos postula que al menos existe un conjunto. Para concretar, postularemos la existencia de un conjunto específico, a saber, el conjunto vacío. Ya que más adelante formularemos una suposición de existencia más profunda y más útil, la siguiente juega sólo un papel temporal.

Axioma 1 (de Existencia) *Hay un conjunto que no tiene elementos.*

Un conjunto sin elementos puede ser descrito de manera intuitiva de varias formas; por ejemplo, como "el conjunto de los perros que han escrito obras literarias" o como "el conjunto de números reales que satisfacen la ecuación $x^2 + 1 = 0$". Intuitivamente los ejemplos de esta clase describen al mismo conjunto, a saber, el conjunto vacío, conjunto vacuo. Pero no podemos probar esta afirmación; necesitamos otro axioma que exprese el hecho de que un conjunto está determinado por sus elementos, tal y como intuitivamente lo concebimos.

Axioma 2 (de Extensión) *Si todo elemento de X es un elemento de Y, y todo elemento de Y es un elemento de X, entonces $X = Y$.*

---

[1] El símbolo $\in$ se deriva de la letra griega épsilon. El uso de esta letra para la relación de pertenencia fue introducido por Peano [P$_2$] quien la seleccionó como abreviación de la palabra Griega estar ($\grave{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}$)

El Axioma de Extensión puede expresarse en otras palabras diciendo: dos conjuntos que tienen los mismos elementos son idénticos. Simbólicamente este axioma puede expresarse así:

$$X = Y \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x : x \in X \;\Rightarrow\; x \in Y) \;\wedge\; (\forall x : x \in Y \;\Rightarrow\; x \in X).$$

Por otra parte, es valioso comprender que el *Axioma de Extensión no es sólo una propiedad lógicamente necesaria de la igualdad, sino que es una proposición no trivial acerca de la pertenencia*. Una manera de llegar a entender este punto es considerar una situación en la cual el análogo al Axioma de Extensión no se cumpla. Supóngase, por ejemplo, que consideramos seres humanos como (en lugar de) conjuntos y que, si x y A son seres humanos, escribiremos $x \in A$ siempre que x es un ancestro de A (por ejemplo, $x \in A$ si x es padre de A o si x es bisabuelo de A). El análogo del Axioma de Extensión diría en este caso que "dos seres humanos tienen los mismos ancestros si y sólo si son iguales". Pero, ¿qué pasa con dos hermanos?

Proposición 2.1 *Hay un único conjunto que no tiene elementos.*

DEMOSTRACIÓN:

Asumamos que A y B no tienen elementos. Entonces todo elemento de A es un elemento de B (puesto que A no tiene elementos la proposición "$a \in A \;\Rightarrow\; a \in B$" es automáticamente cierta). Similarmente, todo elemento de B es un elemento de A. Por el Axioma de Extensión concluimos que $A = B$. ■

La proposición anterior nos posibilita para hacer la siguiente definición.

Definición 2.2 El único conjunto que no tiene elementos es llamado el *conjunto vacío* y es denotado por $\emptyset$.

Intuitivamente, los conjuntos son colecciones de objetos que satisfacen alguna propiedad, y sería deseable tener un axioma que exprese este hecho. Este axioma retomaría el espíritu de la "definición" de conjunto dada por Cantor. El problema es que no toda propiedad describe un conjunto, pues algunas propiedades pueden introducir paradojas y nuestra intención al axiomatizar la Teoría de Conjuntos es precisamente evitar las paradojas. En seguida demostraremos que la colección $\{x : x \text{ es un conjunto}\}$ no es un conjunto, es decir, la propiedad $\mathbf{P}(x)$: "x es un conjunto", no describe en realidad un conjunto.

El problema estará resuelto si postulamos solamente la existencia del conjunto de todos los objetos que tienen una propiedad dada, los cuales pertenezcan a otro conjunto ya dado de antemano. El siguiente axioma puede considerarse como de los más importantes, pues permite la construcción de nuevos conjuntos a partir de otros ya existentes.

Axioma 3 (Esquema de Comprensión) *Sea* $\mathbf{P}(x)$ *una propiedad de* x*. Para cualquier conjunto* A *hay un conjunto* B *tal que* $x \in B$ *si y sólo si* $x \in A$ *y* $\mathbf{P}(x)$.

En contraste a los otros axiomas, los cuales son proposiciones, el Axioma Esquema de Comprensión es una colección infinita de proposiciones. Esto es, éste es un esquema para producir axiomas, uno por cada elección de la propiedad $\mathbf{P}$. Por ejemplo, si $\mathbf{P}(x)$ es "$x = x$" el axioma dice: Para cualquier conjunto A, hay un conjunto B tal que $x \in B$ si y sólo si $x \in A$ y $x = x$. (En este caso $A = B$). Si $\mathbf{P}(x)$ es "$x \notin x$", el axioma postula: Para cualquier conjunto A hay un conjunto B tal que $x \in B$ si y sólo si $x \in A$ y $x \notin x$. Por lo anterior el Axioma 3 se llama *Esquema de Comprensión*.

La propiedad $\mathbf{P}(x)$ puede depender de otras variables $p, q, \ldots, r$; el correspondiente axioma postula entonces que para cualquier selección de las variables $p, q, \ldots, r$, y cualquier conjunto A, hay un conjunto B (que depende de $p, q, \ldots, r$ y A) que consiste exactamente de los elementos de A para los cuales se verifica $\mathbf{P}(x, p, q, \ldots, r)$.

Ejemplo 2.3 Si P y Q son conjuntos, entonces hay un conjunto R tal que $x \in R$ si y sólo si $x \in P$ y $x \in Q$.

Demostración:

Considérese la propiedad $\mathbf{P}(x, Q)$ de x y Q: "$x \in Q$". Entonces por el Axioma Esquema de Comprensión, para todo Q y cualquier P hay un conjunto R tal que $x \in R$ si y sólo si $x \in P$ y $\mathbf{P}(x, Q)$, es decir, si y sólo si $x \in P$ y $x \in Q$. ■

Ejemplo 2.4 El conjunto de todos los conjuntos no existe.

Demostración:

Supongamos lo contrario, sea $\mathcal{U}$ el conjunto de todos los conjuntos y consideremos la propiedad $\mathbf{P}(x)$: "$x \notin x$". El Axioma 3 nos dice que existe un conjunto R tal que $x \in R$ si y sólo si $x \in \mathcal{U}$ y $x \notin x$; o sea, x es un elemento de R si y sólo si x es un conjunto y x no es miembro de sí mismo. Como R es un conjunto entonces $R \in \mathcal{U}$, así entonces R puede o no verificar la propiedad $\mathbf{P}$. Si $R \notin R$ entonces $R \in R$, es decir, $(R \notin R) \wedge (R \in R)$, una contradicción.

Por otro lado, si $R \in R$ entonces R sí verifica la propiedad $\mathbf{P}$, es decir, $R \notin R$, nuevamente $(R \in R) \wedge (R \notin R)$, una contradicción. Por lo tanto, suponer la existencia de $\mathcal{U}$ y considerar la propiedad legítima $\mathbf{P}$ siempre lleva a una contradicción, concluimos que no existe tal conjunto $\mathcal{U}$. ■

Nótese que de hecho $\mathcal{U}$ mismo no es esencial para el razonamiento anterior. En efecto, si en lugar de $\mathcal{U}$ tomáramos otro conjunto cualquiera X y razonamos por medio del Axioma Esquema de Comprensión de la misma manera que en la demostración anterior, tendríamos que concluir que $R \notin X$. Esta deducción es interesante, pues nos permite decir que hay algo (es decir, R) que no pertenece a X. Como el conjunto X en este razonamiento es arbitrario, hemos demostrado que *no hay un conjunto que contenga todo*, o bien que *no hay un universo*. "Universo" se usa aquí en el sentido de "universo de discurso", lo cual significa, en cualquier discusión particular, un conjunto que contiene a todos los objetos que intervienen en ese estudio. En tratamientos más antiguos (preaxiomáticos) a la Teoría de Conjuntos, se daba por supuesta la existencia de un universo.

El razonamiento del Ejemplo 2.4 se conoce como *la Paradoja de Russell*[2] y en la literatura toma muchas formas equivalentes a la que hemos planteado aquí. La moraleja es que es imposible, especialmente en matemáticas, obtener algo a partir de nada. *Para especificar un conjunto no basta dar una propiedad; es necesario también disponer de un conjunto a cuyos elementos pueda aplicarse esa propiedad.* Esta es la limitación impuesta por el Axioma 3; la manera de suprimir las dificultades que surgen al definir "conjuntos muy grandes" es proceder a la inversa, garantizando por medio de axiomas la existencia de conjuntos mínimos y la obtención de nuevos conjuntos a partir de los ya existentes.

En capítulos posteriores tendremos la oportunidad de conocer otras colecciones (distintas de $\mathcal{U}$, la colección de todos los conjuntos) que no son conjuntos; pero nos permitimos hacer la siguiente:

Convención 2.5 Si $\mathbf{P}(x)$ es una propiedad de x, a

$$\mathbf{K} = \langle x : x \textit{ es un conjunto y } \mathbf{P}(x) \rangle$$

le llamaremos clase.

Debe quedar claro que no se está definiendo lo que es una clase, la convención anterior nos facilitará más adelante referirnos a ciertas colecciones. La

[2] En 1903 fue publicada por primera vez la Paradoja de Russell, en el apéndice de [F_4].

discusión anterior también nos dice que una clase *no necesariamente* es un conjunto. La diferencia entre estos dos conceptos originó parte de los problemas lógicos de Cantor.

Lema 2.6 *Sea* $\mathbf{P}(x)$ *una propiedad de* x. *Para todo* A *hay un único conjunto* B *tal que* $x \in B$ *si y sólo si* $x \in A$ *y* $\mathbf{P}(x)$.

Demostración:

Si B' es un conjunto tal que $x \in B'$ si y sólo si $x \in A$ y $\mathbf{P}(x)$, entonces $x \in B$ si y sólo si $x \in B'$. Así, $B = B'$ por el Axioma de Extensión. ■

Ahora tenemos derecho de hacer la siguiente definición que provee de una notación al conjunto B unívocamente determinado.

Definición 2.7 $\{x \in A : \mathbf{P}(x)\}$ es el conjunto de todos los $x \in A$ con la propiedad $\mathbf{P}(x)$.

Nuestro sistema axiomático hasta este momento no es muy poderoso; el único conjunto cuya existencia postulamos es el conjunto vacío, y las aplicaciones del Esquema de Comprensión a éste, producen nuevamente el conjunto vacío: para cualquier propiedad $\mathbf{P}(x)$, $\{x \in \emptyset : \mathbf{P}(x)\} = \emptyset$. Los siguientes tres axiomas postulan que algunos de los procedimientos frecuentemente usados en matemáticas producen conjuntos.

Axioma 4 (del Par) *Para cualesquiera* a *y* b *hay un conjunto* C *tal que* $x \in C$ *si y sólo si* $x = a$ *o* $x = b$.

Así, $a \in C$ y $b \in C$, y no hay otros elementos en C. Por el Axioma de Extensión el conjunto C es único. Definimos el *par no ordenado* de a y b como el conjunto que tiene a a y a b como elementos, y lo denotamos por $\{a, b\}$. Podemos formar el par no ordenado $\{a, a\}$ el cual se denota simplemente por $\{a\}$, y se llama conjunto *singular* o *unitario* de a.

El Axioma del Par asegura que todo conjunto es un elemento de algún conjunto, y dos conjuntos cualesquiera son simultáneamente elementos de algún mismo conjunto.

Ejemplo 2.8 Sean $A = \emptyset$ y $B = \emptyset$, entonces $\{\emptyset\} = \{\emptyset, \emptyset\}$ es un conjunto tal que $\emptyset \in \{\emptyset\}$. Note que $\emptyset \neq \{\emptyset\}$, puesto que $\emptyset$ no tiene elementos y $\{\emptyset\}$ tiene un elemento.

Ejemplo 2.9 Sean $A = \emptyset$ *y* $B = \{\emptyset\}$. Entonces $\emptyset \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ *y* $\{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$; además, $\emptyset$ *y* $\{\emptyset\}$ son los únicos elementos de $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Note que $\emptyset \neq \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ y $\{\emptyset\} \neq \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Ejemplo 2.10 Sean $A = \{\emptyset\}$ y $B = \{\emptyset\}$, entonces $\emptyset \in \{\emptyset\}$ y $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$. Pero $\emptyset \notin \{\{\emptyset\}\}$, ya que el único elemento del conjunto $\{\{\emptyset\}\}$ es $\{\emptyset\}$, y por el Ejemplo 2.8, $\emptyset \neq \{\emptyset\}$.

Del ejemplo anterior podemos deducir que $\emptyset \neq \{\{\emptyset\}\}$ y que $\{\emptyset\} \neq \{\{\emptyset\}\}$, lo cual nos permite inferir la existencia de muchísimos conjuntos singulares como: $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}$, $\{\{\{\emptyset\}\}\}$, $\ldots, \{\cdots\{\{\emptyset\}\}\cdots\}$, o bien pares no ordenados como $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, etc. Sin embargo, una pregunta interesante es: ¿Son realmente distintos estos conjuntos? La respuesta se deja como un ejercicio, aquí únicamente notaremos que no debemos confundir los conjuntos de un solo elemento con el elemento propiamente dicho. No es cierto que x y $\{x\}$ sean iguales, lo cual puede confirmarse observando que $\{x\}$ sólo tiene un miembro, a saber x; mientras que x puede tener cualquier número de miembros. Véase el Ejemplo 2.8 y más adelante el Teorema 2.33 para derivar razones más convincentes.

Si A y B son conjuntos, es deseable reunir a sus elementos en un solo conjunto. Este conjunto es diferente del que se construyó con el Axioma 4: mientras que los elementos del par no ordenado son los conjuntos A y B, nuestro nuevo conjunto tendrá por elementos a los elementos de A y B (ver Ejemplo 2.15).

Axioma 5 (de Unión) *Para cualquier conjunto S, existe un conjunto U tal que $x \in U$ si y sólo si $x \in X$ para algún $X \in S$.*

Nuevamente el conjunto U es único. Éste es llamado *unión* de S y denotado por $\bigcup S$. Decimos que S es un *sistema de conjuntos o familia de conjuntos* cuando queremos hacer énfasis en que los elementos de S son conjuntos. La unión de una familia de conjuntos S es entonces el conjunto de, precisamente, todos los x que pertenecen a algún conjunto que forma parte de la familia S.

Ejemplo 2.11 Sea $S = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$; entonces $x \in \bigcup S$ si y sólo si $x \in A$ para algún $A \in S$, *es decir*, si y sólo si $x \in \emptyset$ o $x \in \{\emptyset\}$. Por lo tanto, $x \in \bigcup S$ si y sólo si $x = \emptyset$; o sea, $\bigcup S = \{\emptyset\}$.

Ejemplo 2.12 $\bigcup \emptyset = \emptyset$

Ejemplo 2.13 Sean A y B conjuntos, $x \in \bigcup\{A, B\}$ si y sólo si $x \in A$ o $x \in B$. El conjunto $\bigcup\{A, B\}$ es llamado la unión de A *y* B y es denotado por $A \cup B$.

Obsérvese que el Axioma del Par y el Axioma de Unión son necesarios para definir la unión de dos conjuntos, y el Axioma de Extensión es necesario para garantizar la unicidad. Además nótese que la unión de dos conjuntos tiene el significado usual:

$$x \in A \cup B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \quad \vee \quad x \in B.$$

Ejemplo 2.14 $\{\{\emptyset\}\} \cup \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

Ejemplo 2.15 Si $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ y $B = \{\{\{\emptyset\}\}\}$, entonces el par no ordenado de A y B es distinto de $A \cup B$.

El Axioma de Unión es muy poderoso; éste nos capacita no sólo para formar uniones de dos conjuntos, sino también para formar la unión de un número infinito de conjuntos (más tarde se aclarará tal situación).[3]

Dados a, b y c, puede probarse la unicidad del conjunto P cuyos elementos son exactamente a, b y c, en efecto $P = \{a, b\} \cup \{c\}$. P es denotado por $\{a, b, c\}$ y se llama *terna no ordenada* de a, b y c. Análogamente puede definirse una cuarteta, quinteta, sexteta no ordenada, etc.

Ahora introduciremos un concepto simple y familiar para el lector.

Definición 2.16 A es un *subconjunto* de B si cualquier elemento de A pertenece a B. En otras palabras, A es un subconjunto de B si, para todo x, $x \in A$ implica $x \in B$. Escribiremos $A \subseteq B$ o $B \supseteq A$ para denotar que A es subconjunto de B.

Ejemplo 2.17 $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ y $\{\{\emptyset\}\} \subseteq \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Ejemplo 2.18 $x \in A$ si y sólo si $\{x\} \subseteq A$.

Según la Definición 2.16, todo conjunto debe considerarse subconjunto de sí mismo.

Ejemplo 2.19 $\emptyset \subseteq A$ y $A \subseteq A$ para todo conjunto A.

Ejemplo 2.20 Para cualesquiera conjuntos A, B y C tales que $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ se tiene que $A \subseteq C$.

El Axioma Esquema de Comprensión puede ahora interpretarse como un axioma que nos permite la formación de subconjuntos.

Ejemplo 2.21 $\{x \in A : \mathbf{P}(x)\} \subseteq A$.

---

[3] Las nociones de finito e infinito serán formalizadas posteriormente, por el momento las emplearemos en forma intuitiva.

Ejemplo 2.22 Si $A \in S$ entonces $A \subseteq \bigcup S$.

Si A y B son dos conjuntos tales que $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$, entonces A y B tienen los mismos elementos y, por lo tanto, en virtud del Axioma de Extensión, $A = B$. De hecho el Axioma de Extensión puede ser formulado en estos términos: Si A y B son dos conjuntos, una condición necesaria y suficiente para que $A = B$ es que $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ simultáneamente. Por lo anterior, casi todas las demostraciones de igualdad entre dos conjuntos A y B están divididas en dos partes, hacer ver primero que $A \subseteq B$ y mostrar después que $B \subseteq A$.

Obsérvese que la pertenencia ($\in$) y la contención ($\subseteq$)[4] son, conceptualmente, cosas muy diferentes. Una diferencia importante es la que manifiesta el Ejemplo 2.19 al mostrarnos que para cualquier conjunto A, $A \subseteq A$ mientras que no está del todo claro que cualquier conjunto A, $A \in A$. Indudablemente que esto último no es posible para cualquier conjunto razonable, de hecho $\emptyset \notin \emptyset$ y por ende $\subseteq$ es reflexiva pero $\in$ no lo es. Sin embargo, no podremos demostrar que para cualquier conjunto A, $A \notin A$, hasta que introduzcamos el Axioma de Fundación. Otra diferencia entre $\in$ y $\subseteq$ la podemos derivar de los Ejemplos 2.10 y 2.20 como sigue: $\emptyset \in \{\emptyset\}$ y $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$ pero $\emptyset \notin \{\{\emptyset\}\}$, es decir, la pertenencia ($\in$) a diferencia de la contención ($\subseteq$) no tiene carácter transitivo.

Ahora introducimos el siguiente axioma, el cual nos asegura que dado un conjunto cualquiera podemos formar un nuevo conjunto cuyos miembros son exactamente los subconjuntos del conjunto dado; en forma precisa:

Axioma 6 (del Conjunto Potencia) *Para cualquier conjunto X existe un conjunto S tal que $A \in S$ si y sólo si $A \subseteq X$.*

Puesto que el conjunto S está unívocamente determinado, llamamos al conjunto S de todos los subconjuntos de X, el *conjunto potencia* de X y es denotado por $\mathcal{P}(X)$.

Ejemplo 2.23 $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

Ejemplo 2.24 $\mathcal{P}(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$.

Ejemplo 2.25 $\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

Ejemplo 2.26 Para cualquier conjunto X, siempre $\emptyset, X \in \mathcal{P}(X)$. En particular siempre se cumple $\mathcal{P}(X) \neq \emptyset$ para cualquier X.

Ejemplo 2.27 Si $A \subseteq B$ entonces $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

[4] El crédito de la distinción entre pertenencia y contención se da generalmente a Peano, quien introdujo diferentes notaciones para los dos conceptos.

Ejemplo 2.28 Si $X = \{\emptyset, a, b, \{a\}\}$ y $A = \{a\} \subseteq X$ entonces $\mathcal{P}(A) \subseteq X$.

Ejemplo 2.29 Si $X = \{\emptyset, a, b\}$ y $A = \{a\}$ entonces $\mathcal{P}(A) \nsubseteq X$.

A continuación responderemos la pregunta: ¿Para algún conjunto X puede ocurrir que $X \in X$? Para conjuntos "razonables" que a uno se le puedan ocurrir la respuesta es indudablemente no, pero en realidad esta pregunta no puede ser respondida sin el siguiente axioma.

Axioma 7 (de Fundación) *En cada conjunto no vacío A existe $u \in A$ tal que u y A no tienen elementos en común, es decir, para cualquier x, si $x \in A$ entonces $x \notin u$.*

Este axioma también se conoce como Axioma de Regularidad y postula que "conjuntos" de cierto tipo no existen. Esta restricción no es contradictoria (es decir, el axioma es consistente con los otros axiomas) y es irrelevante para el desarrollo de los números naturales, reales, cardinales u ordinales; y de hecho para casi todas las matemáticas ordinarias. Sin embargo, es extremadamente útil en las matemáticas de la Teoría de Conjuntos, para la Construcción de Modelos.[5] En [A_1] se desarrolla una Teoría de Conjuntos con la negación del Axioma de Fundación.

Ejemplo 2.30 Si $A = \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ entonces $u = \{\emptyset\}$ y A no tienen elementos en común.

Ejemplo 2.31 Si $A = \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}\}$ entonces $\{\{\{\emptyset\}\}\}$ y A tienen a $\{\{\emptyset\}\}$ como elemento común. También $\{\{\emptyset\}\}$ y A tienen a $\{\emptyset\}$ como elemento común, pero $\{\emptyset\}$ y A no tienen elementos comunes.

Ejemplo 2.32 Si $\emptyset \in A$ entonces tomando a $u = \emptyset$ tenemos que u y A no tienen elementos comunes.

Teorema 2.33 *(a) Ningún conjunto no vacío puede ser elemento de sí mismo, es decir, para cualquier $X \neq \emptyset$, $X \notin X$.*

(b) Si A y B son conjuntos no vacíos, entonces no es posible que ocurran simultáneamente $A \in B$ y $B \in A$.

---

[5] En 1994 H. Andréka, I. Németi y Á. Kurucz demostraron que el Axioma de Fundación es necesario para derivar un importante teorema del Álgebra Universal como es el Teorema de Variedad de Birkhoff. [AKN]

Demostración:

(a) Supongamos que existe un conjunto no vacío X tal que $X \in X$. Por el Axioma del Par, $\{X\}$ también es un conjunto, y puesto que X es el único miembro de $\{X\}$, el conjunto $\{X\}$ contradice el Axioma de Fundación, ya que X y $\{X\}$ tienen a X como elemento común, es decir, todo elemento de $\{X\}$ tiene un elemento común con $\{X\}$.

(b) Para este caso considere el par no ordenado $\{A, B\}$ y proceda de modo análogo a *(a)*. ■

La parte *(a)* del teorema anterior responde a la pregunta planteada anteriormente: ¿para algún conjunto X puede ocurrir que $X \in X$? Mientras que de la parte *(b)* podemos deducir que no pueden existir ciclos de la forma $A \in B \in A$.

Hasta ahora nuestra lista de axiomas no está completa. Pospondremos los restantes para capítulos ulteriores cuando introduzcamos otros conceptos y hayamos establecido algunos teoremas que nos permitirán entenderlos.

Ahora introduciremos una notación convencional. Sea $\mathbf{P}(x)$ una propiedad de x (y, posiblemente de otros parámetros). Si hay un conjunto A tal que para todo x, $\mathbf{P}(x)$ implica $x \in A$, entonces $\{x \in A : \mathbf{P}(x)\}$ existe; y más aún, no depende de quién sea el conjunto A. En efecto, si A' es otro conjunto tal que, para todo x, $\mathbf{P}(x)$ implica $x \in A'$, entonces

$$\left\{x \in A' : \mathbf{P}(x)\right\} = \{x \in A : \mathbf{P}(x)\}.$$

Podemos ahora definir $\{x : \mathbf{P}(x)\}$ como el conjunto $\{x \in A : \mathbf{P}(x)\}$, donde A es cualquier conjunto para el que $\mathbf{P}(x)$ implica $x \in A$. $\{x : \mathbf{P}(x)\}$ es el conjunto de todo x que tiene la propiedad $\mathbf{P}(x)$. Enfatizamos nuevamente que esta notación podrá ser usada solamente después que se haya probado que algún conjunto A contiene a todos los x con la propiedad $\mathbf{P}(x)$. Recuerde que lo que llamamos clase tiene otra notación, a saber, $\langle x : \mathbf{P}(x)\rangle$.

Ejemplo 2.34 $\{x : (x \in P) \wedge (x \in Q)\}$ existe.

Demostración:

Sea $\mathbf{P}(x, P, Q)$ la propiedad "$x \in P$ y $x \in Q$". Sea $A = P$; entonces $\mathbf{P}(x, P, Q)$ implica $x \in A$. Por lo tanto,

$$\{x : (x \in P) \wedge (x \in Q)\} = \{x \in P : (x \in P) \wedge (x \in Q)\} = \{x \in P : x \in Q\}$$

es el conjunto del Ejemplo 2.3. ■

Ejemplo 2.35 $\{x : (x = a) \vee (x = b)\}$ existe. Para una prueba, tómese $A = \{a, b\}$ y demuéstrese que $A = \{x : (x = a) \vee (x = b)\}$.

Ejemplo 2.36 $\{x : x \notin x\}$ no existe (recuérdese la *Paradoja de Russell* Ejemplo 2.4); así en este caso, la notación $\{x : \mathbf{P}(x)\}$ es inadmisible.

Como ya se dijo, la primera axiomatización de la Teoría de Conjuntos fue dada por Zermelo [Z_2]. La formulación del Axioma Esquema de Comprensión, al cual le llamaba *Aussonderungsaxiom*, fue más bien ambiguo y dio lugar a serias discusiones; la versión adoptada fue formulada por T. Skolem [S_7] en 1922. El Axioma de Fundación fue propuesto por D. Mirimanoff en 1917.

Russell y Whitehead en su famoso *Principia Mathematica* (primera edición 1910-1913) dieron también una de las primeras y más influyentes axiomatizaciones para la Teoría de Conjuntos. Ellos evitaban las paradojas introduciendo la llamada "teoría de tipos"; en la cual se definen una cantidad infinita de diferentes tipos de variables de conjuntos. Para cada tipo de variables de conjuntos hay una cantidad infinita de variables del siguiente tipo superior. La propiedad "x es un miembro de y" tiene significado si y sólo si y es de exactamente un tipo superior a x. La paradoja de Russell, por ejemplo, al estar representada por la propiedad "x no es un miembro de x" carece de sentido en la teoría de tipos. Ya que la teoría de tipos es complicada, y puesto que es pesado dar seguimiento a todos los tipos de variables, esta teoría es inconveniente para el desarrollo de las matemáticas.

Otra axiomatización de la Teoría de Conjuntos fue propuesta por Quine en 1931. Su enfoque puede decirse que es mas bien semántico; él dio reglas para la construcción de propiedades. La teoría de Quine es más manejable que la teoría de los tipos pero contiene fallas fatales que no permite desarrollar la matemática a partir de esta teoría. Specker [S_8] en 1953 demostró que el Axioma de Elección (que después formularemos) es inconsistente en el sistema de Quine.

Von Neumann [N_2], [N_3] entre 1925 y 1928 propuso otra axiomatización en la cual se hacía preciso el ambiguo Axioma Esquema de Comprensión de Zermelo. En lugar de usar propiedades como Skolem, Von Neumann admitió una nueva noción primitiva dentro de la Teoría de Conjuntos: la de *clase*. Este sistema fue posteriormente reformulado por Bernays [B_1] en 1937 y por Gödel [G_2] en 1938. La ventaja del sistema resultante, llamado en la literatura "sistema **BG**", es que está basado en un número finito de axiomas. Otros sistemas axiomáticos fueron propuestos por Morse y por Kelley [M_5], [K_3].

Ejercicios 2.2

1. Muestre que los conjuntos $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}$, $\ldots, \{\cdots\{\emptyset\}\cdots\}$ son distintos.
2. Indique cuáles de las siguientes expresiones son falsas:
$$\text{(a) } A = \{A\}\,, \qquad \text{(b) } \{a, b\} = \{\{a\}, \{b\}\}\,, \qquad \text{(c) } \emptyset \in \{\emptyset\}\,.$$
3. Muestre que el conjunto de todos los x tales que $x \in A$ y $x \notin B$ existe. ¿Es único?
4. Pruebe que para cualquier conjunto X hay algún $a \notin X$.
5. Demuestre la unicidad del conjunto U asegurado por el Axioma de Unión.
6. Pruebe que $\bigcup \emptyset = \emptyset$.
7. Verifique la afirmación hecha en el Ejemplo 2.15.
8. Sean A y B conjuntos. Muestre que existe un único conjunto C tal que $x \in C$ si y sólo si ($x \in A$ y $x \notin B$) o ($x \in B$ y $x \notin A$).
9. Demuestre que $\{a\} = \{b, c\}$ si y sólo si $a = b = c$.
10. (a) Muestre que para cualesquiera conjuntos A, B y C existe un único conjunto P tal que $x \in P$ si y sólo si $x = A$ o $x = B$ o $x = C$.
    (b) Generalice (a) para cuatro o más elementos.
11. Demuestre que $A \subseteq \{A\}$ si y sólo si $A = \emptyset$.
12. Verifique las afirmaciones de los Ejemplos 2.18, 2.19, 2.20.
13. Pruebe la afirmación del Ejemplo 2.22.
14. Demuestre que si $A \subseteq B$ entonces $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.
15. Pruebe la afirmación del Ejemplo 2.35.
16. Complete la demostración del Teorema 2.33(b).
17. Pruebe que es imposible la existencia de un ciclo:
$$A_0 \in A_1 \in A_2 \in \cdots \in A_n \in A_0$$
para toda $n \in \mathbf{N}$.

18. (a) Demuestre que para cualquier conjunto X es falso que $\mathcal{P}(X) \subseteq X$. En particular $X \neq \mathcal{P}(X)$.
    (b) Demuestre que el conjunto de todos los conjuntos no existe usando el inciso (a).

19. Reemplace el Axioma de Existencia por el siguiente axioma:
    Axioma Débil de Existencia. Existe al menos un conjunto.
    Deduzca el Axioma de Existencia usando el Axioma Débil de Existencia y el Axioma Esquema de Comprensión.

20. El Axioma de Unión, el Axioma del Par y el Axioma del Conjunto Potencia pueden reemplazarse por las siguientes versiones más débiles:
    Axioma Débil del Par. Para cualesquiera a, b existe un conjunto C tal que $a \in C$ y $b \in C$.
    Axioma Débil de Unión. Para cualquier conjunto S existe un conjunto U tal que si $x \in A$ y $A \in S$ entonces $x \in U$.
    Axioma Débil del Conjunto Potencia. Para cualquier conjunto S existe un conjunto P tal que $X \subseteq S$ implica $X \in P$.
    Deduzca el Axioma del Par, el Axioma de Unión y el Axioma del Conjunto Potencia, usando las versiones débiles. (Sugerencia: use el Axioma Esquema de Comprensión).

3

Álgebra de Conjuntos

En este capítulo, como en los siguientes, estudiaremos las operaciones conjuntistas más comunes, por lo que momentáneamente supondremos la existencia de conjuntos como el de los números naturales $\mathbf{N}$,[1] el de los números reales $\mathbf{R}$, o conjuntos que de ellos se desprenden; esto es sólo con el afán de proporcionar ejemplos ilustrativos de los conceptos que tratemos. La existencia de estos conjuntos será formalizada en su momento.

3.1 Operaciones Fundamentales

En el capítulo anterior la Definición 2.16 reza “A se dice subconjunto de B, $A \subseteq B$, si todo elemento de A es también un elemento de B”. La relación de contención $\subseteq$ tiene las siguientes propiedades para conjuntos A, B y C.

(1) $A \subseteq A$.
(2) Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ entonces $A \subseteq C$.
(3) $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ si y sólo si $A = B$.

(1), (2), (3) se expresan brevemente diciendo que la propiedad de contención es reflexiva, transitiva y antisimétrica, respectivamente.

En los Ejemplos 2.3 y 2.13 se mostró la existencia de dos útiles conjuntos; ahora hacemos una definición formal de ellos.

Definición 3.1 Si A y B son conjuntos, la *unión* de A y B, es el conjunto

$$A \cup B = \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

La *intersección* de A y B es el conjunto

$$A \cap B = \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

Acorde a la definición anterior, una condición necesaria y suficiente para que $A \cap B \neq \emptyset$ es que A y B tengan elementos en común.

[1] Aquí consideraremos $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Definición 3.2 Diremos que los conjuntos A y B son *ajenos* si $A \cap B = \emptyset$.

Con la terminología proporcionada por las definiciones anteriores podemos formular el Axioma de Fundación como sigue: "En cada conjunto no vacío A existe un elemento $u \in A$ que es ajeno a A, es decir, $u \cap A = \emptyset$".

El siguiente teorema nos muestra cómo se comportan la unión $\cup$ y la intersección $\cap$ con respecto de la contención.

Teorema 3.3 *Para cualesquiera conjuntos A, B, C, D tenemos:*

(a) $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$.

(b) Si $A \subseteq C$ y $B \subseteq D$ entonces $A \cap B \subseteq C \cap D$ y $A \cup B \subseteq C \cup D$.

(c) $A \subseteq C$ y $B \subseteq C$ si y sólo si $A \cup B \subseteq C$.

Demostración:

Solamente probaremos *(a)* dejando como ejercicio para el lector las partes *(b)* y *(c)*. Si $x \in A \cap B$ entonces $x \in A$ y $x \in B$, así en particular $x \in A$, es decir $A \cap B \subseteq A$. Por otra parte, para cualquier $x \in A$ se tiene que $x \in A \cup B$ por definición de $A \cup B$, es decir, $A \subseteq A \cup B$. ■

El siguiente teorema puede demostrarse sin dificultad.

Teorema 3.4 *Las operaciones $\cap$ y $\cup$ son:*

(a) Reflexivas: para todo A,

$$A \cap A = A = A \cup A.$$

(b) Asociativas:

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \quad y \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

(c) Conmutativas:

$$A \cap B = B \cap A \quad y \quad A \cup B = B \cup A.$$

Más aún, $\cap$ distribuye sobre $\cup$ y $\cup$ distribuye sobre $\cap$:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

y

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

En virtud de la asociatividad, podemos designar a $A\cup(B\cup C)$ simplemente por $A\cup B\cup C$. Similarmente, una unión y una intersección de cuatro conjuntos, digamos $(A\cup B)\cup(C\cup D)$ y $(A\cap B)\cap(C\cap D)$, pueden ser escritas como $A\cup B\cup C\cup D$ y $A\cap B\cap C\cap D$ puesto que la distribución de paréntesis es irrelevante, y por la conmutatividad el orden de los términos también es irrelevante. Por inducción, la misma observación es aplicable a la unión y la intersección de cualquier número finito de conjuntos. La unión y la intersección de n conjuntos son escritas como

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k, \qquad \bigcap_{k=1}^{n} A_k.$$

Ahora daremos una caracterización de la propiedad $A\subseteq B$ en términos de la unión y la intersección.

Teorema 3.5 *Los siguientes enunciados son equivalentes:*
(a) $A\subseteq B$.
(b) $A=A\cap B$.
(c) $B=A\cup B$.

Demostración:

(a) $\Rightarrow$ *(b)*. Supongamos que $A\subseteq B$. Por 3.3(a) sabemos que $A\cap B\subseteq A$. Ahora, si $x\in A$ entonces $x\in A$ y $x\in B$ (ya que $A\subseteq B$); o sea, $x\in A\cap B$. Por lo tanto, $A\subseteq A\cap B$. Así concluimos que $A=A\cap B$.

(b) $\Rightarrow$ *(c)*. Si $A=A\cap B$ entonces se tienen las siguientes implicaciones: $x\in A\cup B\Rightarrow(x\in A)\vee(x\in B)\Rightarrow(x\in A\cap B)\vee(x\in B)\Rightarrow x\in B$, lo cual muestra que $A\cup B\subseteq B$, y nuevamente 3.3(a) nos proporciona $B\subseteq A\cup B$. Por lo tanto, $B=A\cup B$.

(c) $\Rightarrow$ *(a)*. Si $B=A\cup B$ entonces $A\subseteq A\cup B=B$. ■

Definición 3.6 La *diferencia* de dos conjuntos A y B es

$$A\setminus B=\{x\in A: x\notin B\}.$$

El Ejercicio 2.2.3 del capítulo anterior nos muestra que tal conjunto existe.

Ejemplo 3.7 Si $A=\{x\in\mathbf{R}:0\leq x\leq 1\}$ y $B=\left\{x\in\mathbf{R}:\frac{1}{2}<x\leq 2\right\}$, entonces $A\setminus B=\left\{x\in\mathbf{R}:0\leq x\leq\frac{1}{2}\right\}$.

Ejemplo 3.8 $A\setminus\emptyset=A$ y $A\setminus B=A\setminus(A\cap B)$.

Ejemplo 3.9 Si $A\setminus B=A$, entonces $A\cap B=\emptyset$.

Ejemplo 3.10 $A \setminus B = \emptyset$ si y sólo si $A \subseteq B$.

La operación diferencia no tiene propiedades tan simples como $\cap$ y $\cup$; por ejemplo: si $A \neq \emptyset$, $(A \cup A) \setminus A \neq A \cup (A \setminus A)$, es decir, la colocación de paréntesis en $A \cup A \setminus A$ es importante. Otra diferencia es que, mientras que la unión y la intersección son operaciones conmutativas, por su propia definición la diferencia de conjuntos no es conmutativa.

Por otra parte, obsérvese que la negación de la proposición $x \in A \setminus B$, es equivalente a la proposición: $x \notin A \ \vee \ x \in B$, es decir, $x \notin A \setminus B$ si y sólo si x no es un elemento de A o x es un elemento de B. Ahora $x \in A \setminus (A \setminus B)$ si y sólo si $x \in A \wedge x \notin A \setminus B$ si y sólo si $[x \in A] \ \wedge \ [x \notin A \ \vee \ x \in B]$ si y sólo si $[x \in A \ \wedge x \notin A] \ \vee \ [x \in A \ \wedge \ x \in B]$ si y sólo si $x \in A \cap B$; hemos probado la siguiente proposición.

Proposición 3.11 *Para conjuntos arbitrarios A y B tenemos que*

$$A \cap B = A \setminus (A \setminus B).$$

Definición 3.12 Si $A \subseteq B$ el *complemento* de A *con respecto de* B es el conjunto $B \setminus A$.

Teorema 3.13 *Para cualesquiera dos conjuntos A y B, y cualquier conjunto E que contenga a $A \cup B$,*

$$A \setminus B = A \cap (E \setminus B).$$

Demostración:

Como $A \cup B \subseteq E$, tenemos que $A \setminus B = \{x \in E : (x \in A) \wedge (x \notin B\} = \{x \in E : x \in A\} \cap \{x \in E : x \notin B\} = A \cap (E \setminus B)$. ■

Teorema 3.14 *Si E es un conjunto que contiene a $A \cup B$, entonces:*
(a) $A \cap (E \setminus A) = \emptyset, \quad A \cup (E \setminus A) = E.$
(b) $E \setminus (E \setminus A) = A.$
(c) $E \setminus \emptyset = E, \quad E \setminus E = \emptyset.$
(d) $A \subseteq B$ *si y sólo si* $E \setminus B \subseteq E \setminus A.$

El siguiente es uno de los resultados elementales de mayor uso, se conoce habitualmente como *Leyes de De Morgan*.

Teorema 3.15 *Si $A, B \subseteq X$ entonces:*
(a) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B).$
(b) $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B).$

Demostración:

$x \in X \setminus (A \cup B)$ si y sólo si $x \in X$ y $x \notin A \cup B$ si y sólo si $x \in X$, $x \notin A$ y $x \notin B$ si y sólo si $x \in X \setminus A$ y $x \in X \setminus B$. Esto establece *(a);* para probar *(b)* hacemos: $X \setminus [(X \setminus A) \cup (X \setminus B)] = [X \setminus (X \setminus A)] \cap [X \setminus (X \setminus B)] = A \cap B$; entonces $(X \setminus A) \cup (X \setminus B) = X \setminus (A \cap B)$. ■

Definición 3.16 Sean A y B conjuntos, se define la *diferencia simétrica* de A y B como:

$$A \triangle B = \{x \in A : x \notin B\} \cup \{x \in B : x \notin A\}.$$

En el Ejercicio 2.2.8 del capítulo anterior se pide demostrar que la diferencia simétrica de dos conjuntos existe.[2] La diferencia simétrica tiene las siguientes propiedades:

Teorema 3.17 *Para conjuntos A, B y C se tiene:*
(a) $A \triangle \emptyset = A$.
(b) $A \triangle A = \emptyset$.
(c) $A \triangle B = B \triangle A$.
(d) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.
(e) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.
(f) Si $A \triangle B = A \triangle C$ *entonces* $B = C$.

Observemos además que, para cualesquiera dos conjuntos A y C existe - exactamente un conjunto B tal que $A \triangle B = C$, a saber, $B = A \triangle C$, en otras palabras:

$$A \triangle (A \triangle C) = C,$$
$$A \triangle B = C \quad \Rightarrow \quad B = A \triangle C.$$

En efecto, los incisos *(a)*, *(b)* y *(d)* del Teorema 3.17 implican que $A \triangle (A \triangle C) = (A \triangle A) \triangle C = \emptyset \triangle C = C \triangle \emptyset = C$. Además si $A \triangle B = C$ entonces $A \triangle (A \triangle B) = A \triangle C$ y por tanto, $B = A \triangle C$. Lo anterior nos dice que la operación $\triangle$ es inversa de sí misma.

El lector que conozca la definición de anillo, utilizando el Teorema 3.4 en sus partes *(b)* y *(c)* referentes a la intersección y el Teorema 3.17, podrá darse cuenta que para cualquier conjunto X, el conjunto $\mathcal{P}(X)$ con las operaciones $\triangle$ y $\cap$ funcionando como suma y producto, es un anillo conmutativo con unidad X. Una peculiaridad de este anillo es que la operación "sustracción" coincide con la operación "suma" y más aún, el "cuadrado" de cualquier elemento es

[2] Las propiedades de la diferencia simétrica fueron investigadas extensivamente por Hausdorff en [H_5].

igual a ese elemento. Note que $\cup$ y $\setminus$ no funcionan como suma y sustracción, respectivamente.

Usando $\triangle$ y $\cap$ como las operaciones básicas, los cálculos en el álgebra de conjuntos pueden resolverse por aritmética ordinaria. Además, podemos omitir todos los exponentes y reducir todos los coeficientes módulo 2 (es decir, $2kA = \emptyset$ y $(2k+1)A = A$).

Este resultado es significativo puesto que las operaciones $\cup$ y $\setminus$ pueden ser expresadas en términos de $\triangle$ y $\cap$. Este hecho hace que toda el álgebra de subconjuntos de un conjunto particular X pueda ser representada como la aritmética en el anillo $\mathcal{P}(X)$. En efecto, uno puede fácilmente verificar que:

$$A \cup B = A \triangle B \triangle (A \cap B)$$
$$A \setminus B = A \triangle (A \cap B).$$

Ejercicios 3.1

1. Demuestre las partes (b) y (c) del Teorema 3.3.
2. Demuestre el Teorema 3.4.
3. (a) Demuestre que si $A \subseteq C$ entonces $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$.
   (b) ¿Será cierto el resultado anterior si se suprime la hipótesis $A \subseteq C$?
   (c) Demuestre que $A \subseteq C$ si y sólo si $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$.
4. Pruebe las afirmaciones hechas en los Ejemplos 3.8, 3.9 y 3.10.
5. Muestre que si $A \neq \emptyset$ entonces $(A \cup A) \setminus A \neq A \cup (A \setminus A)$.
6. Demuestre el Teorema 3.14.
7. Pruebe que

   (a) $A \setminus B = (A \cup B) \setminus B$.
   (b) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.
   (c) $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$.
   (d) $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$.
   (e) $(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$.
   (f) $(A \setminus B) \setminus (A \setminus C) = A \cap (C \setminus B)$.

(g) $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = (A_1 \setminus A_2) \cup \cdots \cup (A_{n-1} \setminus A_n) \cup (A_n \setminus A_1) \cup (\bigcap_{k=1}^{n} A_k)$.

(h) Si $A, B \subseteq X$, entonces $(X \setminus A) \setminus (X \setminus B) = B \setminus A$.

8. Muestre por medio de ejemplos que las siguientes proposiciones son falsas.

   (a) $A \setminus B = B \setminus A$.

   (b) $A \subseteq (B \cup C)$ implica $A \subseteq B$ o $A \subseteq C$.

   (c) $B \cap C \subseteq A$ implica $B \subseteq A$ o $C \subseteq A$.

9. Sea X un conjunto que contiene a $A \cup B$.

   (a) Demuestre que si $A \cup B = X$ entonces $X \setminus A \subseteq B$.

   (b) Demuestre que si $A \cap B = \emptyset$ entonces $A \subseteq X \setminus B$.

   (c) Utilizando los incisos anteriores demuestre que $A = X \setminus B$ si y sólo si $A \cup B = X$ y $A \cap B = \emptyset$.

10. Pruebe que el sistema de ecuaciones $A \cup X = A \cup B$, $A \cap X = \emptyset$ tiene a lo más una solución para X.

11. Sea A un conjunto. Demuestre que el "complemento" de A no es un conjunto. (El "complemento" de A es el conjunto de todos los $x \notin A$).

12. Pruebe el Teorema 3.17.

13. Pruebe que $A \triangle B = \emptyset$ si y sólo si $A = B$.

14. Pruebe que
$$A \cup B = A \triangle B \triangle (A \cap B)$$
$$A \setminus B = A \triangle (A \cap B).$$

3.2 Producto Cartesiano

Las operaciones de unión e intersección nos proporcionan nuevos conjuntos a partir de otros conjuntos dados. En esta sección introduciremos otro conjunto construido a partir de dos conjuntos A y B, que denotaremos por $A \times B$ y llamaremos el producto cartesiano de A y B. El producto cartesiano es una de las construcciones más importantes de la Teoría de Conjuntos, pues permite expresar muchos conceptos fundamentales de matemáticas en términos de conjuntos.

A diferencia de los elementos de la unión y de la intersección, los elementos del producto cartesiano son de naturaleza distinta a los elementos de A y de B, ya que $A \times B$ consistirá de lo que a continuación definiremos como parejas ordenadas de elementos. Intuitivamente una pareja ordenada es una entidad consistente de dos objetos en un orden específico. Para el empleo de la noción de par ordenado en matemáticas, uno desea que los pares ordenados tengan dos propiedades: *(i)* dados dos objetos a y b, exista un objeto, el cual puede ser denotado por (a, b) que esté unívocamente determinado por a y b; *(ii)* si (a, b) y (c, d) son dos pares ordenados, entonces $(a, b) = (c, d)$ si y sólo si $a = c$ y $b = d$. Por el Ejemplo 2.35, es posible definir un objeto, de hecho un conjunto, con la propiedad *(i)*.

Definición 3.18 Se define el *par ordenado* de elementos a y b como

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Si $a \neq b$, (a, b) tiene dos elementos, un singular $\{a\}$ y un par no ordenado $\{a, b\}$. La *primera coordenada* de (a, b) es el elemento que pertenece a ambos conjuntos, o sea a, y la *segunda coordenada* es el elemento perteneciente a sólo uno de los conjuntos, a saber, b. Si $a = b$, entonces $(a, a) = \{\{a\}, \{a, a\}\}$ tiene un único elemento; en este caso ambas coordenadas son iguales. Es muy oportuno observar que $(a, b) \subseteq \mathcal{P}(\{a, b\})$.

Probaremos ahora que los pares ordenados tienen la propiedad *(ii)* antes mencionada.

Teorema 3.19 $(a, b) = (c, d)$ *si y sólo si* $a = c$ *y* $b = d$.

DEMOSTRACIÓN:

$\Leftarrow]$ Si $a = c$ y $b = d$, entonces:

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\} = (c, d).$$

$\Rightarrow]$ Supongamos que $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$. Si $a \neq b$, entonces debe suceder que $\{a\} = \{c\}$ y $\{a, b\} = \{c, d\}$. Así, $a = c$, y entonces $\{a, b\} = \{a, d\}$. De esto se deduce que $b = d$. Si $a = b$, $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}\}$. Así $\{a\} = \{c\}$ y $\{a\} = \{c, d\}$, lo cual implica que $a = c = d$. Por lo tanto, $a = c$ y $b = d$. ■

Con los pares ordenados a nuestra disposición podemos definir ternas ordenadas como

$$(a, b, c) = ((a, b), c),$$

cuartetas ordenadas como

$$(a, b, c, d) = ((a, b, c), d),$$

etc.; y es evidente que la correspondiente caracterización (Teorema 3.19) de igualdad también es apropiada.

Kuratowski [K_6] en 1921 fue el primero en dar una definición satisfactoria de par ordenado. Lo complicado de tal definición reside en evitar toda referencia a la forma de escribir los símbolos (a, b). Los filósofos de la primera época de la Teoría de Conjuntos se encontraron metidos en un problema en lo relativo a dicha cuestión. La dificultad reside en eliminar la simetría existente entre a y b. El motivo por el cual los filósofos no consiguieron hacerlo fue su confusión en cuanto a la distinción que existe entre x y $\{x\}$, pues querían que fuese lo mismo. Poniendo $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$, la asimetría del segundo miembro basta para probar el Teorema 3.19, el cual hace que la definición de par ordenado sea adecuada.

Definición 3.20 Sean A y B conjuntos cualesquiera. El *producto cartesiano* de A y de B es el conjunto $A \times B$ es el conjunto consistente de todos aquellos pares ordenados (a, b) tales que $a \in A$ y $b \in B$, esto es,

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \ \wedge \ b \in B\}.$$

Estamos describiendo un nuevo conjunto y por ende debemos asegurar su existencia como tal, es por ello que damos la siguiente proposición que nos afirma que $A \times B$ es un conjunto.

Proposición 3.21 *Para cualesquiera A y B, $A \times B$ es un conjunto.*

DEMOSTRACIÓN:

Por el Ejemplo 2.27 del Capítulo 2 tenemos que siempre que $a \in A$ y $b \in B$ entonces $\mathcal{P}(\{a, b\}) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$, y como $(a, b) \subseteq \mathcal{P}(\{a, b\})$, se sigue que cuando $a \in A$ y $b \in B$ se tiene que $(a, b) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$, o bien $(a, b) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$. Por lo tanto,

$$A \times B = \{(a, b) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) : a \in A \ \wedge \ b \in B\}.$$

Ya que $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$ existe, la existencia de $A \times B$ como conjunto se sigue del Axioma Esquema de Comprensión. ■

Denotaremos $A \times A$ por A^2. Hemos definido una terna ordenada de elementos a, b y c como $(a,b,c) = ((a,b),c)$. Para ser consistentes con esa definición, introducimos el producto cartesiano de tres conjuntos A, B y C como

$$A \times B \times C = (A \times B) \times C.$$

Note que

$$A \times B \times C = \{(a,b,c) : a \in A \ \wedge \ b \in B \ \wedge \ c \in C\}.$$

Usando una obvia extensión de nuestra notación, $A \times A \times A$ será denotado por A^3. De modo análogo, el producto cartesiano de cuatro conjuntos puede también ser introducido.

Ejemplo 3.22 Sean $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{2,4,5\}$. Entonces

$$A \times B = \{(1,2),\ (1,4),\ (1,5),\ (2,2),\ (2,4),\ (2,5),\ (3,2),\ (3,4),\ (3,5)\}.$$

Ejemplo 3.23 Si $A = \mathbf{R} = B$, entonces $A \times B = \{(x,y) : x, y \in \mathbf{R}\} = \mathbf{R}^2$ es el plano usual de la geometría analítica.

Ejemplo 3.24 Sea $A = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}$ (es decir, A es la circunferencia unitaria) y sea $B = \{x \in \mathbf{R} : 0 \leq x \leq 1\}$. Entonces, $A \times B$ es el conjunto de los puntos de $\mathbf{R}^3$ que están en el cilindro unitario de altura 1.

Teorema 3.25 *(a) $A \times B = \emptyset$ si y sólo si $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$.*
(b) Si $C \times D \neq \emptyset$, entonces $C \times D \subseteq A \times B$ si y sólo si $C \subseteq A$ y $D \subseteq B$.
(c) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.
(d) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

Demostración:

La demostración de la proposición en *(a)* es inmediata a partir de las definiciones.

(b) $\Rightarrow$] Veamos que $D \subseteq B$. Un argumento simétrico será suficiente para establecer $C \subseteq A$. Puesto que $C \times D \neq \emptyset$, aplicando *(a)* obtenemos que $C \neq \emptyset$. Fijemos un $c \in C$ arbitrario. Ahora, deseamos demostrar que para todo x, $x \in D \Rightarrow x \in B$. Sea $x \in D$. Entonces $(c,x) \in C \times D$ y luego $(c,x) \in A \times B$. De aquí se sigue que $x \in B$. Por lo tanto $D \subseteq B$.

$\Leftarrow$] Sea $(c,d) \in C \times D$. Entonces $c \in C$ y $d \in D$. Como por hipótesis $C \subseteq A$ y $D \subseteq B$, se tiene que $c \in A$ y $d \in B$; de aquí $(c,d) \in A \times B$. Por lo tanto, $C \times D \subseteq A \times B$.

(c) $(x, y) \in A \times (B \cup C)$ si y sólo si $x \in A$ y $y \in B \cup C$ si y sólo si $x \in A$ y $y \in B$ o $y \in C$ si y sólo si $x \in A$ y $y \in B$ o bien $x \in A$ y $y \in C$ si y sólo si $(x, y) \in A \times B$ o $(x, y) \in A \times C$ si y sólo si $(x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$.

(d) Ejercicio. ■

Para conjuntos no vacíos A y B se tiene que $A \times B = B \times A$ si y sólo si $A = B$; así, la operación producto cartesiano no es conmutativa.

Ejercicios 3.2

1. Pruebe que $(a, b) \subseteq \mathcal{P}(\{a, b\})$.
2. Pruebe que (a, b), (a, b, c) y (a, b, c, d) existen para todo a, b, c y d.
3. Pruebe que $(a, b, c) = (a', b', c')$ si y sólo si $a = a'$, $b = b'$ y $c = c'$.
4. Encuentre a, b y c tales que $((a, b), c) \neq (a, (b, c))$. A pesar de este resultado, puede definirse la terna ordenada de elementos a, b y c como $(a, b, c) = (a, (b, c))$, y el producto cartesiano de A, B y C como $A \times B \times C = A \times (B \times C)$. Más adelante veremos que en términos conjuntistas esta discrepancia es irrelevante.
5. Demuestre que $A \times B = B \times A$ si y sólo si $A = B$.
6. Muestre que

   (a) $A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$.

   (b) $A^3 \neq A \times A^2$, es decir, $(A \times A) \times A \neq A \times (A \times A)$.
   Este ejercicio muestra que $\times$ no es asociativo.
7. Si A, B son conjuntos no vacíos y $(A \times B) \cup (B \times A) = C \times C$, demuestre que $A = B = C$.
8. Pruebe la parte (d) del Teorema 3.25.
9. Demuestre que:

   (a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

   (b) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

(c) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

(d) $A \times (B \bigtriangleup C) = (A \times B) \bigtriangleup (A \times C)$.

10. Sean $A, B \subseteq X$ y $C, D \subseteq Y$. Demuestre que:

    (a) $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$.

    (b) $(A \times C) \cup (B \times D) \subseteq (A \cup B) \times (C \cup D)$. Muestre que es posible que no se dé la igualdad.

    (c) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D) \cup (A \times D) \cup (B \times C)$.

    (d) $(X \times Y) \setminus (B \times C) = ((X \setminus B) \times Y) \cup (X \times (Y \setminus C)$.

11. Para dos conjuntos A y B, se define la *unión ajena* de A y B como: $A \sqcup B = (A \times \{x\}) \cup (B \times \{y\})$, donde $x \notin B$, $y \notin A$. Demuestre el análogo del Teorema 3.4 para uniones ajenas.

3.3 Familias de Conjuntos

En el párrafo que sigue al Axioma de Unión hablamos de un tipo muy especial de conjuntos: los *sistemas* o *familias* de conjuntos. Estos conjuntos (como otros) tienen como elementos a conjuntos, es decir, una familia de conjuntos es un “conjunto de conjuntos”. Las familias de conjuntos juegan un papel destacado en otras ramas de las matemáticas, donde el objetivo es estudiar a familias especiales de conjuntos. Por ejemplo, la Topología no es otra cosa que el estudio de las propiedades un sistema especial de subconjuntos de un conjunto dado X. La terminología sistema o familia de conjuntos tiene por objeto resaltar el hecho de que trataremos a los elementos de la familia como conjuntos mismos. Usualmente denotaremos a las familias de conjuntos con letras mayúsculas caligráficas tales como $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Z}$. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 3.26 $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ es un sistema de conjuntos cuyos elementos son el conjunto vacío $\emptyset$ y el conjunto unitario $\{\emptyset\}$.

Ejemplo 3.27 Sea $\mathcal{M} = \{\{x \in \mathbf{N} : x \text{ es par}\}, \{x \in \mathbf{N} : x \text{ es impar}\}\}$. Entonces $\mathcal{M}$ es un sistema de conjuntos cuyos elementos son el conjunto de los números naturales pares y el conjunto de los números naturales impares. Obsérvese que $\mathbf{N} \neq \mathcal{M}$.

Ejemplo 3.28 Para cualquier conjunto X, el conjunto potencia de X, $\mathcal{P}(X)$, es la familia de todos los subconjuntos de X.

Ejemplo 3.29 Recuerde que a una circunferencia en $\mathbf{R}^2$ con centro en el punto $x \in \mathbf{R}^2$ y radio $r > 0$, la podemos considerar como el conjunto $C(x,r) = \left\{y \in \mathbf{R}^2 : \|x - y\| = r\right\}$. Sea E_x la familia de todas las circunferencias en $\mathbf{R}^2$ con centro $x \in \mathbf{R}^2$, es decir, $E_x = \{C(x,r) : r > 0\}$, y sea $\mathcal{E} = \left\{E_x : x \in \mathbf{R}^2\right\}$. Entonces $\mathcal{E}$ es un sistema de conjuntos cuyos elementos son familias de conjuntos. Note que ni los puntos de $\mathbf{R}^2$, ni las circunferencias son elementos de $\mathcal{E}$.

El Axioma de Unión y el Axioma Esquema de Comprensión (véase el párrafo que sigue al Ejemplo 2.15) dan posibilidad de la siguiente definición.

Definición 3.30 Sea $\mathcal{F}$ es una familia no vacía de conjuntos.
(a) La *unión de la familia* $\mathcal{F}$ es el conjunto

$$\bigcup \mathcal{F} = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A = \{x : \exists A \in \mathcal{F}, x \in A\}.$$

(b) La *intersección de la familia* $\mathcal{F}$ es el conjunto

$$\bigcap \mathcal{F} = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} A = \{x : \forall A \in \mathcal{F}, x \in A\}.$$

Ejemplo 3.31 Si $\mathcal{M}$ es la familia definida en el Ejemplo 3.27, entonces $\mathbf{N} = \bigcup \mathcal{M}$.

Ejemplo 3.32 Para cualquier conjunto X, $X = \bigcup \mathcal{P}(X)$.

Ejemplo 3.33 Si $\mathcal{F} = \{A, B\}$, entonces $\bigcup \mathcal{F} = A \cup B$ y $\bigcap \mathcal{F} = A \cap B$. Ver Ejemplo 2.13.

Ejemplo 3.34 Si $\mathcal{F} = \{A\}$, entonces $\bigcup \mathcal{F} = A = \bigcap \mathcal{F}$.

A continuación introduciremos un concepto asociado con las familias de conjuntos. Supongamos que tomamos un conjunto $I \neq \emptyset$ y que a cada $\alpha \in I$ le corresponde un único conjunto A_α. Al sistema $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha \in I\}$ le llamamos *familia de conjuntos indizada* por el conjunto I. En este caso, se dice que I es el conjunto de índices de $\mathcal{A}$. Nótese que no se requiere que a distintos índices les correspondan distintos conjuntos. Para referirnos a familias indizadas de conjuntos, en ocasiones emplearemos la forma breve $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$, o simplemente $\{A_\alpha\}_\alpha$ cuando sea claro el conjunto de índices que se está usando.

Observación 3.35 Cualquier familia no vacía de conjuntos $\mathcal{F}$ puede considerarse como una familia indizada de conjuntos, donde el conjunto de índices es *el mismo* $\mathcal{F}$, a saber: $\mathcal{F} = \{F_A : A \in \mathcal{F}\}$, donde $F_A = A$ para cada $A \in \mathcal{F}$.

Ejemplo 3.36 Sean $I = \{1, 2, 3\}$ y $A_1 = \{1, 2, 5\}$, $A_2 = \{5, 7, 1\}$, $A_3 = \{2, 5, 7\}$. Entonces $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ es una familia indizada de conjuntos.

Ejemplo 3.37 Para $x \in \mathbf{R}^2$, la familia E_x del Ejemplo 3.29 es una familia indizada de conjuntos, donde el conjunto de índices es el conjunto de los números reales positivos $I = \{r \in \mathbf{R} : r > 0\}$. También el sistema $\mathcal{E}$ es una familia indizada de conjuntos, aquí el conjunto de índices es $\mathbf{R}^2$.

Con el concepto de familia indizada de conjuntos, la unión de la familia $\mathcal{F} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ puede denotarse como

$$\bigcup \mathcal{F} = \bigcup \{A_\alpha : \alpha \in I\} = \bigcup \{A_\alpha\}_{\alpha \in I} = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$$

y es el conjunto $\{x : \exists \alpha \in I \text{ tal que } x \in A_\alpha\}$. La intersección es denotada por

$$\bigcap \mathcal{F} = \bigcap \{A_\alpha : \alpha \in I\} = \bigcap \{A_\alpha\}_{\alpha \in I} = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$$

y es el conjunto $\{x : \forall \alpha \in I,\, x \in A_\alpha\}$. Cuando el conjunto de índices sea el conjunto de los números naturales $\mathbf{N}$, denotaremos con

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \quad \text{a} \quad \bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n$$

y con

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \quad \text{a} \quad \bigcap_{n \in \mathbf{N}} A_n.$$

Ejemplo 3.38 Para cualquier conjunto X, $X = \bigcup \{\{x\} : x \in X\}$.

Ejemplo 3.39 Sea $A_k = \{n \in \mathbf{N} : n \geq k\}$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Note que $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots$, y que $\bigcap_{k=0}^{\infty} A_k = \emptyset$.

Ejemplo 3.40 Sean $x \in \mathbf{R}^2$ y E_x la familia indizada de conjuntos definida en el Ejemplo 3.29. Entonces $\bigcup E_x = \bigcup_{r>0} C(x, r) = \mathbf{R}^2 \setminus \{x\}$ *y* $\bigcap E_x = \bigcap_{r>0} C(x, r) = \emptyset$.

Ejemplo 3.41 Si

$$\mathcal{C} = \left\{ C \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^2) : C \text{es una circunferencia no degenerada} \right\}$$

y $\mathcal{E}$ es el sistema del Ejemplo 3.29, entonces $\mathcal{C} = \bigcup \mathcal{E}$.

Ejemplo 3.42 Si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ entonces $\bigcap \mathcal{B} \subseteq \bigcap \mathcal{A}$.

No hay problema con la Definición 3.30 si uno de los elementos de $\mathcal{F}$ es el conjunto vacío. Por otra parte el Ejemplo 2.12 muestra que si $\mathcal{F} = \emptyset$ entonces $\bigcup \mathcal{F} = \emptyset$; en efecto, aplicando literalmente el Axioma de Unión, vemos que no existen x que satisfagan la propiedad que define a la unión de la familia $\mathcal{F}$. Sin embargo, en el caso en que $\mathcal{F} = \emptyset$ no es posible definir a la intersección de $\mathcal{F}$ pues esto generaría contradicciones dado que cualquier x satisface la propiedad que define a la intersección de $\mathcal{F}$, es decir, $x \in A$ para todo $A \in \mathcal{F}$ (puesto que no hay tales A). Así $\bigcap \emptyset$ podría ser el "conjunto de todos los conjuntos", por lo cual la *intersección de una familia vacía de conjuntos no está definida.* Por las observaciones anteriores y 3.35, restringiremos el estudio a familias indizadas no vacías de conjuntos. El siguiente teorema nos proporciona propiedades que relacionan a las uniones e intersecciones "generalizadas" con las uniones e intersecciones "elementales", la generalización de las Leyes de De Morgan y el producto cartesiano.

Teorema 3.43 *(a)* $\bigcup_\alpha$ *distribuye sobre* $\cap$ *y* $\bigcap_\alpha$ *distribuye sobre* $\cup$.

$$\left[\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right] \cap \left[\bigcup_{\beta\in J} B_\beta\right] = \bigcup \{A_\alpha \cap B_\beta : (\alpha,\beta) \in I \times J\} \tag{3.3.1}$$

$$\left[\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right] \cup \left[\bigcap_{\beta\in J} B_\beta\right] = \bigcap \{A_\alpha \cup B_\beta : (\alpha,\beta) \in I \times J\}. \tag{3.3.2}$$

(b) Si el complemento es tomado respecto a X, entonces:

$$X \setminus \bigcup \{A_\alpha : \alpha \in I\} = \bigcap \{X \setminus A_\alpha : \alpha \in I\} \tag{3.3.3}$$

$$X \setminus \bigcap \{A_\alpha : \alpha \in I\} = \bigcup \{X \setminus A_a : \alpha \in I\}. \tag{3.3.4}$$

(c) $\bigcup_\alpha$ *y* $\bigcap_\alpha$ *distribuyen sobre el producto cartesiano:*

$$\left[\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right] \times \left[\bigcup_{\beta\in J} B_\beta\right] = \bigcup \{A_\alpha \times B_\beta : (\alpha,\beta) \in I \times J\} \tag{3.3.5}$$

$$\left[\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right] \times \left[\bigcap_{\beta\in J} B_\beta\right] = \bigcap \{A_\alpha \times B_\beta : (\alpha,\beta) \in I \times J\}. \tag{3.3.6}$$

Demostración:

(a) $x \in [\bigcup\{A_\alpha : \alpha \in I\}] \cap [\bigcup\{B_\beta : \beta \in J\}]$ si y sólo si $x \in \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ y $x \in \bigcup_{\beta\in J} B_\beta$ si y sólo si $x \in A_{\alpha_o}$ para algún $\alpha_o \in I$ y $x \in B_{\beta_o}$ para algún $\beta_o \in J$ si y sólo si $x \in A_{\alpha_o} \cap B_{\beta_0}$ si y sólo si $x \in \bigcup\{A_\alpha \cap B_\beta : (\alpha, \beta) \in I \times J\}$. Esto establece la igualdad (3.3.1). Similarmente se establece (3.3.2).

(b) $x \in X \setminus \bigcup\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ si y sólo si $x \in X$ y $x \notin \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ si y sólo si $x \in X$ y $\forall \alpha \in I,\ x \notin A_\alpha$ si y sólo si $x \in X \setminus A_\alpha$ para cada $\alpha \in I$, si y sólo si $x \in \bigcap\{X \setminus A_\alpha : \alpha \in I\}$. Esto establece la ecuación (3.3.3). Análogamente se establece (3.3.4).

(c) $(a, b) \in [\bigcup\{A_\alpha : \alpha \in I\}] \times [\bigcup\{B_\beta : \beta \in J\}]$ si y sólo si existen $\alpha \in I$ y $\beta \in J$ tales que $a \in A_\alpha$ y $b \in B_\beta$ si y sólo si $(a, b) \in A_\alpha \times B_\beta$ si y sólo si $(a, b) \in \bigcup\{A_\alpha \times B_\beta : (\alpha, \beta) \in I \times J\}$. Lo que establece la igualdad (3.3.5). Del mismo modo se prueba (3.3.6). ■

El siguiente corolario establece formas más concretas del teorema anterior, las cuales son usadas con mayor frecuencia.

Corolario 3.44 *(a)*$A \cap \bigcup\{A_\alpha : \alpha \in I\} = \bigcup\{A \cap A_\alpha : \alpha \in I\}$.
(b) $A \cup \bigcap\{A_\alpha : \alpha \in I\} = \bigcap\{A \cup A_\alpha : \alpha \in I\}$.
(c) $A \times \bigcup\{A_\alpha : \alpha \in I\} = \bigcup\{A \times A_\alpha : \alpha \in I\}$.
(d) $A \times \bigcap\{A_\alpha : \alpha \in I\} = \bigcap\{A \times A_\alpha : \alpha \in I\}$.

Finalmente:

Teorema 3.45 $\bigcap_\alpha$ *y* $\mathcal{P}$ *conmutan*

$$\bigcap_{\alpha\in I} \mathcal{P}(A_\alpha) = \mathcal{P}\left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right).$$

Sin embargo, $\bigcup_\alpha$ *y* $\mathcal{P}$ *no conmutan, aunque*

$$\bigcup_{\alpha\in I} \mathcal{P}(A_\alpha) \subseteq \mathcal{P}\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right).$$

Demostración:

$A \in \bigcap_{\alpha\in I} \mathcal{P}(A_\alpha)$ si y sólo si para cada $\alpha \in I,\ A \in \mathcal{P}(A_\alpha)$ si y sólo si para cada $\alpha \in I$, $A \subseteq A_\alpha$ y sólo si $A \subseteq \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$ si y sólo si $A \in \mathcal{P}\left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right)$.

Si $A \in \bigcup_{\alpha\in I} \mathcal{P}(A_\alpha)$ entonces existe $\alpha \in I$ tal que $A \in \mathcal{P}(A_\alpha)$, o sea, $A \subseteq A_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$, lo que implica $A \in \mathcal{P}\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right)$.

Para ver que $\bigcup_\alpha$ y $\mathcal{P}$ no conmutan, sean $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2\}$. Entonces

$$\bigcup_{\alpha\in I} \mathcal{P}(A_\alpha) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$$

y

$$\mathcal{P}\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}. \quad \blacksquare$$

Ejercicios 3.3

1. Sea $\mathcal{M} = \{\{x \in \mathbf{N} : x \text{ es par}\}, \{x \in \mathbf{N} : x \text{ es impar}\}\}$. Muestre que $\mathcal{M} \neq \mathbf{N}$ y que $\mathbf{N} = \bigcup \mathcal{M}$.

2. Suponiendo que $\mathbf{R}$ es un conjunto, demuestre que los conjuntos definidos en el Ejemplo 3.29 existen.

3. Demuestre que $\bigcap \mathcal{F}$ existe para toda $\mathcal{F} \neq \emptyset$. ¿Dónde se utiliza la hipótesis $\mathcal{F} \neq \emptyset$ en la demostración?

4. Muestre que para cualquier conjunto X, $\bigcap \mathcal{P}(X) = \emptyset$.

5. Sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos. Pruebe que $\bigcup \mathcal{F} = \emptyset$ si y sólo si $\mathcal{F} = \emptyset$ o $A \in \mathcal{F}$ implica $A = \emptyset$.

6. Verifique las afirmaciones de los Ejemplos 3.40, 3.41 y 3.42.

7. Si A y B son conjuntos y X es el par ordenado (A, B), pruebe lo siguiente:

   (a) $\bigcup X = \{A, B\}$.
   (b) $\bigcap X = \{A\}$.
   (c) $\bigcup (\bigcap X) = A$.
   (d) $\bigcap (\bigcap X) = A$.
   (e) $\bigcup (\bigcup X) = A \cup B$.
   (f) $\bigcap (\bigcup X) = A \cap B$.

8. Supóngase que se sabe que la familia X es un par ordenado. Use los resultados del ejercicio anterior para obtener la primera y la segunda coordenadas de X.

9. Pruebe las ecuaciones (3.3.2), (3.3.4) y (3.3.6) del Teorema 3.43.

10. Una familia de conjuntos $\mathcal{F}$ se dice *ajena por pares* si para cualesquiera $A, B \in \mathcal{F}$, con $A \neq B$, se tiene que $A \cap B = \emptyset$. Sea $\mathcal{F} = \{A_n : n \in \mathbf{N}\}$ una familia de conjuntos ajena por pares, y sea $S_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_k$ para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

    (a) Muestre que la familia
    $$\mathcal{E} = \{A_0\} \cup \{A_n \setminus S_{n-1} : n \in \mathbf{N} \text{ y } n \geq 1\}$$
    es ajena por pares.

    (b) Muestre que $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \bigcup \mathcal{E} = A_0 \cup (A_1 \setminus S_2) \cup \cdots \cup (A_n \setminus S_{n-1}) \cup \cdots$.

11. Sean $\mathcal{F} \neq \emptyset$ y X conjuntos.

    (a) Sea $\mathcal{E}_1 = \{A \in \mathcal{P}(X) : A = F \cap X \text{ para algún } F \in \mathcal{F}\}$. Pruebe que $X \cap \bigcup \mathcal{F} = \bigcup \mathcal{E}_1$.

    (b) Sea $\mathcal{E}_2 = \{A \in \mathcal{P}(X) : A = X \setminus F \text{ para algún } F \in \mathcal{F}\}$. Pruebe que $X \setminus \bigcup \mathcal{F} = \bigcap \mathcal{E}_2$, $X \setminus \bigcap \mathcal{F} = \bigcup \mathcal{E}_2$.

12. Demuestre que la unión y la intersección generalizada satisfacen la siguiente forma de asociación:
    $$\bigcup \left\{ A_\alpha : \alpha \in \bigcup \mathcal{I} \right\} = \bigcup_{I \in \mathcal{I}} \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right)$$
    $$\bigcap \left\{ A_\alpha : \alpha \in \bigcap \mathcal{I} \right\} = \bigcap_{I \in \mathcal{I}} \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right),$$
    donde $\mathcal{I}$ es una familia no vacía de conjuntos no vacíos.

13. Sea $\mathcal{F} = \{A_n : n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}\}$ una familia de subconjuntos de X, es decir, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Defina
    $$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_{n+k} \right),$$
    $$\liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{k=0}^{\infty} A_{n+k} \right).$$
    Sea también para cada $x \in X$, $J_x = \{n \in \mathbf{N} : x \in A_n\}$. Demuestre lo siguiente:

(a) $\limsup A_n = \{x \in X : J_x \text{ es infinito}\}$.

(b) $\liminf A_n = \{x \in X : \mathbf{N} \setminus J_x \text{ es finito}\}$.

(c) $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \liminf A_n \subseteq \limsup A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

(d) $\liminf(X \setminus A_n) = X \setminus \limsup A_n$.

(e) Si $\{B_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ es otra familia de subconjuntos de X entonces:

   i. $\liminf A_n \cup \liminf B_n \subseteq \liminf(A_n \cup B_n)$.
   ii. $\liminf A_n \cap \liminf B_n = \liminf(A\ln \cap B_n)$.
   iii. $\limsup(A_n \cap B_n) \subseteq \limsup A_n \cap \limsup B_n$.
   iv. $\limsup(A_n \cup B_n) = \limsup A_n \cup \limsup B_n$.

(f) Si $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$ o $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$, entonces $\liminf A_n = \limsup A_n$.

4

Relaciones y Funciones

Los conceptos de relación y función son, sin duda alguna, de los más importantes dentro de las matemáticas modernas. La mayor parte de la investigación en matemáticas se centra en el estudio de relaciones y funciones, por lo cual, no ha de sorprender que estos conceptos sean de una gran generalidad. Hausdorff consideraba que el concepto de función es casi tan primitivo como el de conjunto, y qué decir del concepto de relación, el cual intuitivamente parece más esencial que el de función.

En matemáticas la palabra *relación* es usada en el sentido de relacionar. Las siguientes oraciones parciales son ejemplos de relaciones:

es menor que,	está incluido en,
divide a,	es miembro de,
es congruente a,	es madre de.

En este capítulo enfocaremos conceptos como los de orden y función desde el punto de vista conjuntista. Veremos que estos pueden ser tratados como relaciones, y que las relaciones pueden ser definidas de manera natural como conjuntos de una estructura especial.

4.1 Relaciones

Empleando parejas ordenadas, intuitivamente podemos pensar que una relación (binaria) R es una proposición tal que, para cada par ordenado (a, b), uno puede determinar cuándo a está en relación R con b o cuándo no lo está. Parece factible que toda relación debe determinar de manera única al conjunto de aquellas parejas ordenadas en las cuales la primera coordenada mantiene esta relación con la segunda. Si conocemos la relación, conocemos el conjunto y, mejor aún, si conocemos el conjunto, conocemos la relación. En otras palabras, las relaciones pueden ser representadas como el conjunto de todos los pares ordenados de objetos mutuamente relacionados. Por ejemplo, el conjunto de todos los pares ordenados consistente de un número real y su raíz puede ser llamado la relación raíz cuadrada. Nótese aquí la importancia de considerar pares ordenados y no sólo pares no ordenados.

Quizá no sepamos lo que es una relación, pero sabemos lo que es un conjunto y las consideraciones precedentes establecen una estrecha conexión entre relaciones y conjuntos. El estudio preciso de las relaciones en la Teoría de Conjuntos saca provecho de esta conexión heurística; lo más fácil de hacer es definir una relación como el conjunto de parejas ordenadas que determina.

Definición 4.1 Un conjunto R es una *relación (binaria)* si todo elemento de R es un par ordenado, es decir, si para todo $z \in R$, existen x, y tales que $z = (x, y)$. Si $R \subseteq A \times B$ diremos que R *es una relación de* A *en* B, o *entre* A *y* B; y si $R \subseteq A \times A$ diremos simplemente que R *es una relación en* A.

Ejemplo 4.2 Definimos una relación entre los enteros positivos y los enteros, diciendo que un entero positivo m está en relación R con un entero n, si m divide a n. La relación R es simplemente el conjunto

$$\{z : \exists\, m, n \text{ tales que } z = (m, n),\ m \in \mathbf{Z},\ n \in \mathbf{Z},\ m > 0 \text{ y } m \text{ divide a } n\}.$$

Los elementos de R son pares ordenados

$$\begin{array}{c}
\ldots,\ (1,-3),\ (1,-2),\ (1,-1),\ (1,0),\ (1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ldots \\
\ldots,\ (2,-6),\ (2,-4),\ (2,-2),\ (2,0),\ (2,2),\ (2,4),\ (2,6),\ldots \\
\ldots,\ (3,-9),\ (3,-6),\ (3,-3),\ (3,0),\ (3,3),\ (3,6),\ (3,9),\ldots \\
\ldots
\end{array}$$

Ejemplo 4.3 Sean A y B conjuntos. La relación de A en B de todos los pares ordenados (a, b) con $a \in A$ y $b \in B$ es llamada relación producto cartesiano y es denotada por $A \times B$.

Ejemplo 4.4 El conjunto $\emptyset$ es una relación llamada relación vacía (para demostrar que $\emptyset$ es un conjunto de parejas ordenadas, busque un elemento de $\emptyset$ que no sea una pareja ordenada).

Ejemplo 4.5 Para cualquier conjunto A, la diagonal

$$Id_A = \{(a, a) : a \in A\}$$

es la *relación de igualdad* o *relación identidad*. Note que en una relación en A (como Id_A) cada par de elementos en A no necesariamente están relacionados: si $a \neq b$, $(a, b) \notin Id_A$ y $(b, a) \notin Id_A$.

Ejemplo 4.6 $R = (A \times A) \setminus Id_A$ es la *relación diferencia* en A.

Ejemplo 4.7 La *relación inclusión* en $\mathcal{P}(X)$ es

$$\{(A, B) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) : A \subseteq B\}.$$

A partir de ahora escribiremos xRy para denotar $(x, y) \in R$.

Definición 4.8 (a) Decimos que x *está en relación* R *con* y si xRy.

(b) El conjunto de todos los x que están en relación R con algún y es llamado *dominio* de R y es denotado por $dom\, R$.

(c) El conjunto de todos los y tales que para algún x, x está en relación R con y, es llamado *rango* de R y denotado por $ran\, R$.

(d) El conjunto $dom\, R \cup ran\, R$ es llamado *campo* de R y denotado por $cam\ R$.

El dominio y el rango de una relación R también pueden ser descritos como $dom\, R = \{x : \exists\, y \text{ tal que } xRy\}$ (o sea, $dom\, R$ es el conjunto de primeras coordenadas de todos los elementos en R) y $ran\, R = \{y : \exists\, x \text{ tal que } xRy\}$ (o sea, $ran\, R$ es el conjunto de las segundas coordenadas de elementos en R). También obsérvese que si $cam\ R \subseteq X$ podemos entonces decir que R es una relación en X.

Ejemplo 4.9 En el Ejemplo 4.2, $dom\, R = \mathbf{Z}^+$, $ran\, R = \mathbf{Z}$ y $cam\ R = dom\, R \cup ran\, R = \mathbf{Z}$.

Ejemplo 4.10 Si R es la relación identidad o la relación diferencia en A, entonces $dom\ R = A = ran\ R$, a menos que A sea unitario, en cuyo caso la relación diferencia es $\emptyset$.

Ejemplo 4.11 $dom\,(A \times B) = A$, $ran\,(A \times B) = B$ y $cam\ (A \times B) = A \cup B$.

Definición 4.12 (a) La *imagen* de un conjunto A bajo R es el conjunto de todos los elementos y del rango de R en relación R con algún elemento de A. Este conjunto es usualmente denotado por $R(A)$. Así,

$$R(A) = \{y \in ran\, R : \exists\, x \in A \ \textit{tal que}\ xRy\}.$$

(b) La *imagen inversa* de un conjunto B bajo R es el conjunto de todos los elementos x del dominio de R en relación R con algún elemento de B. Este conjunto es usualmente denotado por $R^{-1}(B)$. Así,

$$R^{-1}(B) = \{x \in dom\, R : \exists\, y \in B \ \textit{tal que}\ xRy\}.$$

Ejemplo 4.13 Sea R como en 4.2, entonces $R(\{2\})$ es el conjunto de todos los enteros pares (positivos y negativos).

$$R^{-1}(\{-9,-3,8,9,12\}) = \{1,2,3,4,6,8,9,12\}.$$

Definición 4.14 Sea R una relación. La *relación inversa de* R es el conjunto:

$$R^{-1} = \{z : z = (x,y) \quad \wedge \quad (y,x) \in R\}$$

De la propia definición de relación inversa se sigue inmediatamente que $(x,y) \in R^{-1}$ si y sólo si $(y,x) \in R$. Esto justifica el nombre de relación inversa para R^{-1}, pues intuitivamente R^{-1} hace lo contrario que R.

Ejemplo 4.15 Consideremos nuevamente la relación

$$R = \left\{(m,n) : m \in \mathbf{Z}^+, n \in \mathbf{Z} \text{ y } m \text{ divide a } n\right\}.$$

Para tal relación,

$$\begin{aligned} R^{-1} &= \{w : w = (n,m) \quad \wedge \quad (m,n) \in R\} \\ &= \{(n,m) : m \text{ entero positivo, } n \text{ entero y } (m,n) \in R\} \\ &= \{(n,m) : n \text{ entero, } m\text{entero positivo y } n \text{ es múltiplo de } m\}. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.16 $(A \times B)^{-1} = B \times A$.

Ejemplo 4.17 $\emptyset^{-1} = \emptyset$.

Ejemplo 4.18 $(Id_A)^{-1} = Id_A$.

El lector (esperando que el conjunto de lectores sea no vacío) notará que el símbolo $R^{-1}(B)$ usado en la Definición 4.12(b) para la imagen inversa de B bajo R, ahora también es usado para denotar la imagen de B bajo R^{-1}. Afortunadamente estos conjuntos son iguales.

Teorema 4.19 *La imagen inversa de B bajo R es igual a la imagen de B bajo R^{-1}.*

Demostración:

Primero note que el rango de R es igual al dominio de R^{-1}. Ahora $x \in R^{-1}(B)$ si y sólo si existe $y \in B$ tal que $(x,y) \in R$ si y sólo si $(y,x) \in R^{-1}$. Por lo tanto, $x \in R^{-1}(B)$ bajo R si y sólo si para algún y en B, $(y,x) \in R^{-1}$, es decir, si y sólo si x pertenece a la imagen de B bajo R^{-1}. ■

Para simplificar notación, introducimos la siguiente convención. En lugar de escribir

$$\{w : w = (x, y), \text{ para } x, y \text{ con } \mathbf{P}(x, y)\},$$

escribiremos simplemente $\{(x, y) : \mathbf{P}(x, y)\}$. Por ejemplo, dada una relación R, la relación inversa de R puede ser escrita con esta notación como

$$\{(x, y) : (y, x) \in R\}.$$

Obsérvese que, como en el caso general, esta notación es admisible sólo si probamos que existe un conjunto A tal que para todo x, y, $\mathbf{P}(x, y)$ implica que $(x, y) \in A$.

Definición 4.20 Sean R y S relaciones. La *composición de R y S* es la relación

$$S \circ R = \{(x, z) : \exists y \text{ para el cual } (x, y) \in R \text{ y } (y, z) \in S\}.$$

Que un par (x, z) pertenezca a $S \circ R$, significa que para algún y, xRy y ySz. Así que para encontrar objetos relacionados con x en $S \circ R$, primero se encuentran objetos y relacionados a x en R y luego objetos z relacionados en S con alguno de los objetos y; todos estos objetos están relacionados en $S \circ R$ con x. Note que de aquí $S \circ R$ no es lo mismo que $R \circ S$ (ver Ejemplo 4.22).

Ejemplo 4.21 Para cualquier relación R, $\emptyset \circ R = \emptyset = R \circ \emptyset$.

Ejemplo 4.22 Si $R = \{(1, 2)\}$ y $S = \{(2, 0)\}$, entonces $S \circ R = \{(1, 0)\}$; mientras que $R \circ S$ es la relación vacía.

Ejemplo 4.23 Si R es una relación en A, entonces $R \circ Id_A = R = Id_A \circ R$.

Ejemplo 4.24 Si $ran\, R \cap dom\, S = \emptyset$, entonces $S \circ R$ es la relación vacía.

Muchas relaciones son de particular interés, aquí introduciremos una muy importante y en el resto del capítulo definiremos algunas otras.

Definición 4.25 La *relación de pertenencia en (o restringida a) A* es definida por

$$\in_A = \{(a, b) : a \in A,\ b \in A \text{ y } a \in b\}.$$

También pueden definirse relaciones ternarias. Más explícitamente, S es una relación ternaria si para cualquier $u \in S$, existen x, y, z tales que $u = (x, y, z)$. Si $S \subseteq A^3$, se dice que S es una relación ternaria en A. Muchos de los conceptos de esta sección pueden ser generalizados a relaciones ternarias.

Ejercicios 4.1

1. Sea R una relación (binaria). Demuestre que $dom\ R \subseteq \bigcup(\bigcup R)$ y que $ran\ R \subseteq \bigcup(\bigcup R)$. Concluya de esto que $dom\ R$ y $ran\ R$ existen.

2. Muestre que R^{-1} y $S \circ R$ existen. (Sugerencia:
$$R^{-1} \subseteq (ranR) \times (domR), S \circ R \subseteq (domR \times ranS).)$$

3. Sean R una relación y A, B conjuntos. Pruebe:
   (a) $R(A \cup B) = R(A) \cup R(B)$.
   (b) $R(A \cap B) \subseteq R(A) \cap R(B)$.
   (c) $R(A \setminus B) \supseteq R(A) \setminus R(B)$.
   (d) Por medio de ejemplos muestre que $\subseteq$ y $\supseteq$ en (b) y (c) no pueden reemplazarse por $=$.
   (e) Pruebe los incisos (a), ..., (d) con R^{-1} en vez de R.

4. Sean $\mathcal{A}$ una familia de conjuntos y R una relación. Muestre que:
   (a) $R(\bigcup \mathcal{A}) = \bigcup \{R(A) : A \in \mathcal{A}\}$.
   (b) $R(\bigcap \mathcal{A}) \subseteq \bigcap \{R(A) : A \in \mathcal{A}\}$.

5. Sea $R \subseteq X \times Y$. Demuestre:
   (a) $R(X) = ran\ R$ y $R^{-1}(Y) = dom\ R$.
   (b) Si $a \notin dom\ R$, $R(\{a\}) = \emptyset$; si $b \notin ran\ R$, $R^{-1}(\{b\}) = \emptyset$.
   (c) $dom\ R = ran\ R^{-1}$; $ran\ R = dom\ R^{-1}$.
   (d) $(R^{-1})^{-1} = R$.
   (e) $R^{-1} \circ R \supseteq Id_{dom\,R}$, $R \circ R^{-1} \supseteq Id_{ran\,R}$. Dar un ejemplo de una relación R tal que $R^{-1} \circ R \neq Id_{dom\,R}$ y $R \circ R^{-1} \neq Id_{ran\,R}$.

6. Verifique el Ejemplo 4.24.

7. Pruebe que para tres relaciones R, S y T
$$T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R.$$
(La operación $\circ$ es asociativa.)

8. Sean $X = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ y $Y = \mathcal{P}(X)$. Describa:

   (a) $\in_Y$.

   (b) Id_Y.

   (c) Determine el dominio, rango y campo de ambas relaciones.

9. Muestre que si $\mathcal{M}$ es una familia no vacía de relaciones entonces $\bigcap \mathcal{M}$ es una relación.

4.2 Funciones

La palabra *función* fue introducida a las matemáticas por Leibniz, quien originalmente utilizó este término para referirse a cierta clase de fórmulas matemáticas. La idea de Leibniz estaba muy limitada, y el significado de la palabra tuvo desde entonces muchas fases de generalización. Hoy en día, el significado de función es esencialmente el siguiente: Dados dos conjuntos A y B, una función de A en B es una correspondencia que asocia con cada elemento de A un único elemento de B. Una función, por tanto, representa un tipo especial de relación: una relación donde todo objeto del dominio está relacionado precisamente con un único objeto del rango, nombrado el valor de la función.

Definición 4.26 Una relación f es llamada *función* si $(a, b) \in f$ y $(a, c) \in f$ implica que $b = c$ para cualesquiera a, b, c.[1]

En otras palabras, una relación f es una función si y sólo si para todo $a \in dom\ f$ hay exactamente un b tal que $(a, b) \in f$. Este único b es llamado *valor de f en a* y es usualmente denotado por $f(a)$; aunque en algunas ocasiones es muy conveniente la notación f_a. Si f es una función con $dom\, f = A$ y $ran\, f \subseteq B$, entonces

$$f = \{(a, f(a)) : a \in A\}$$

y es costumbre emplear la notación $f : A \to B$ para denotar la función f; o de manera más precisa:

$$\begin{aligned} f :\quad A &\longrightarrow B \\ a &\mapsto f(a) \end{aligned}$$

Obsérvese que si $a \notin A$, $f(a)$ carece de sentido.

[1] Esta definición de función fue propuesta por G. Peano [P_2].

Ejemplo 4.27 Si $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 2\}$, entonces

$$f = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 1)\}$$

no es una función ya que $(1, 1)$ y $(1, 2)$ pertenecen a f, y sin embargo $1 \neq 2$.

Ejemplo 4.28 Sean X y Y son conjuntos y sea $b \in Y$. Entonces $f = X \times \{b\}$ es una función, llamada *función constante* de X en Y.

Ejemplo 4.29 Si X es un conjunto, $f = \big\{(x, y) \in X^2 : x = y\big\}$ es función, se llama *identidad* en X, $f = Id_X$. Ver Ejemplo 4.5.

Ejemplo 4.30 Sean X un conjunto y A un subconjunto de X. Definamos $\chi_A \colon X \to \{0, 1\}$ por la regla

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & si\ x \in A \\ 0, & si\ x \notin A \end{cases}$$

para cada $x \in X$. Esta importante función se llama la *función característica* de A.

Ejemplo 4.31 Sean X un conjunto y $A \subseteq X$. La función $i_A = \{(x, x) : x \in A\}$ es llamada *inclusión de* A *en* X y usualmente se denotada por $i_A : A \hookrightarrow X$.

Ejemplo 4.32 Si A y B son conjuntos, entonces tenemos dos funciones naturales: $p_1 : A \times B \to A$ y $p_2 : A \times B \to B$ tales que $p_1(a, b) = a$ y $p_2(a, b) = b$. Se llaman *proyecciones en la primera* y *la segunda coordenada*, respectivamente.

Ejemplo 4.33 Sea X un conjunto $f : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ definida como $f(A) = X \setminus A$ es una función.

Puesto que las funciones son relaciones, los conceptos de rango, imagen, inversa y composición pueden ser aplicados. Si $f : A \to B$ y $A_1 \subseteq A$, $B_1 \subseteq B$ tenemos que $f \subseteq A \times B$, la imagen de A_1 bajo f es el conjunto

$$\begin{aligned} f(A_1) &= \{y \in B : (x, y) \in f,\ x \in A_1\} \\ &= \{f(x) : x \in A_1\}. \end{aligned}$$

La imagen inversa bajo f de B_1 es

$$\begin{aligned} f^{-1}(B_1) &= \{x \in A : (x, y) \in f,\ \text{para algún } y \in B_1\} \\ &= \{x \in A : f(x) \in B_1\}. \end{aligned}$$

Obsérvese que la descripción de estos conjuntos es más simple para funciones que para relaciones en general (ver Definición 4.12).

Teorema 4.34 *Supongamos que $f : X \to Y$ es una función, entonces:*

(a) Para $A \subseteq X$ resulta que $A = \emptyset$ si y sólo si $f(A) = \emptyset$.

(b) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

(c) $f(\{x\}) = \{f(x)\}$.

(d) Si $A \subseteq B \subseteq X$ entonces

$$f(A) \subseteq f(B) \quad y \quad f(B \setminus A) \supseteq f(B) \setminus f(A).$$

(e) Si $A' \subseteq B' \subseteq Y$ entonces

$$f^{-1}(A') \subseteq f^{-1}(B') \quad y \quad f^{-1}(B' \setminus A') = f^{-1}(B') \setminus f^{-1}(A').$$

(f) Si $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es una familia indizada de subconjuntos de X y $\{A'_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es una familia indizada de subconjuntos de Y, entonces

$$f\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in I} f(A_\alpha) \quad , \quad f\left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right) \subseteq \bigcap_{\alpha\in I} f(A_\alpha)$$

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in I} f^{-1}(A_\alpha) \quad , \quad f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha\in I} f^{-1}(A_\alpha)$$

(g) Si $A \subseteq X$ es tal que $A \subseteq f^{-1}(f(A))$, y si $A' \subseteq Y$,

$$f(f^{-1}(A')) = A' \cap f(X).$$

Demostración:

(a) Esto se obtiene ya que f es una función (para todo $x \in X$, existe $y \in Y$ tal que $(x, y) \in f$) y por la definición de $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$.

(b) Es clara.

(c) Esto se debe a que $(x, y_1) \in f$ y $(x, y_2) \in f$ implica $y_1 = y_2$.

(d) Veamos primero que $f(A) \subseteq f(B)$. Si $y \in f(A)$ entonces existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Como $A \subseteq B$ entonces $x \in B$, luego $y \in f(B)$. Por lo tanto, $f(A) \subseteq f(B)$.

Si $y \in f(B) \setminus f(A)$ entonces $y \in f(B)$ y $y \notin f(A)$, por lo que se deduce la existencia de $x \in B$ tal que $f(x) = y$. Además, como $y \notin f(A)$, entonces para cualquier $a \in A$, $f(a) \neq y$, con lo cual $x \in B \setminus A$; así, $y \in f(B \setminus A)$. Por lo tanto, $f(B) \setminus f(A) \subseteq f(B \setminus A)$.

(e) Veamos primero que $f^{-1}(A') \subseteq f^{-1}(B')$, si $A' \subseteq B'$. Si $x \in f^{-1}(A')$ entonces existe $y \in A'$ tal que $f(x) = y$. Como $A' \subseteq B'$ y $y \in B'$, $x \in f^{-1}(B')$. Por lo tanto, $f^{-1}(A') \subseteq f^{-1}(B')$. Ahora veamos que $f^{-1}(B' \setminus A') = f^{-1}(B') \setminus$

$f^{-1}(A')$. En efecto, $x \in f^{-1}(B' \setminus A')$ si y sólo si existe $y \in B'$ y $y \notin A'$ tal que $f(x) = y$ si y sólo si $x \in f^{-1}(B') \setminus f^{-1}(A')$.

(f) Demostraremos únicamente que

$$f\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in I} f(A_\alpha),$$

dejando como ejercicio las igualdades restantes.

$y \in f\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right)$ si y sólo si existe $x \in \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ con $f(x) = y$ si y sólo si existen $\alpha \in I$ y $x \in A_\alpha$ tales que $f(x) = y$ si y sólo si existe $\alpha \in I$ tal que $y \in f(A_\alpha)$ si y sólo si $y \in \bigcup_{\alpha\in I} f(A_\alpha)$. Por lo tanto, $f\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in I} f(A_\alpha)$.

(g) Ejercicio. ■

El Axioma de Extensión puede ser aplicado a funciones como sigue:

Lema 4.35 *Sean f y g funciones. $f = g$ si y sólo si $dom\, f = dom\, g$ y $f(x) = g(x)$ para todo $x \in dom\, f$.*

Demostración:

$\Rightarrow$] Demostraremos primero que $f = g$ implica $dom\, f = dom\, g$. $x \in dom\, f$ si y sólo si existe algún y para el cual $(x, y) \in f$ si y sólo si existe algún y para el cual $(x, y) \in g$ (pues el conjunto f es igual al conjunto g) si y sólo si $x \in dom\, g$.

Por otra parte si existe $x \in dom\, f$ tal que $f(x) \neq g(x)$ entonces $(x, f(x)) \in f$ y $(x, f(x)) \notin g$ (pues g es función), entonces $(x, f(x)) \in f \setminus g$, es decir, $f \neq g$.

$\Leftarrow$] Supongamos que $dom\, f = dom\, g$ y que para cada $x \in dom\, f$, $f(x) = g(x)$. $(x, y) \in f$ si y sólo si $x \in dom\, f$ y $f(x) = y$ si y sólo si $x \in dom\, g$ y $g(x) = y$ si y sólo si $(x, y) \in g$. Por lo tanto, $f = g$. ■

Introducimos también otras definiciones.

Definición 4.36 Sea f una función y A, B conjuntos:

(a) *f es una función desde A* si $dom\; f \subseteq A$.

(b) *f es una función en A* si $dom\, f = A$.

(c) *f es una función hacia B* si $ran\, f \subseteq B$.

(d) La *restricción de la función f a A* es la función

$$f\mid_A = \{(a, b) \in f : a \in A\}.$$

Si g es una restricción de f para algún A, decimos que f es una *extensión* de g.

Es costumbre emplear la frase: f es una función de A en B, cuando f es una función en A y f es una función hacia B; o sea, $f : A \to B$.

Ejemplo 4.37 Para cualquier conjunto A, hay una única función f de $\emptyset$ en A, a saber, la función vacía, $f = \emptyset$.

Ejemplo 4.38 Sea $f = \left\{(x, \frac{1}{x^2}) : x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}\right\}$. f es una función. En efecto, si $(a, b) \in f$ y $(a, c) \in f$, entonces $b = \frac{1}{a^2}$ y $c = \frac{1}{a^2}$; así, $b = c$. La notación usual para esta función es $f(x) = \frac{1}{x^2}$. f es una función desde el conjunto de los números reales, pero no en el conjunto de los números reales pues $0 \notin dom\, f$. Esta es una función en $A = \mathbf{R}\setminus\{0\} = dom\, f$ y hacia el conjunto de los números reales. Si $C = \{x \in \mathbf{R} : 0 \leq x \leq 1\}$, entonces $f(C) = \{x \in \mathbf{R} : x \geq 1\}$ y $f^{-1}(C) = \{x \in \mathbf{R} : x \leq -1 \ \vee \ x \geq 1\}$. La composición $f \circ f$ es la relación:

$$\begin{aligned}
f \circ f \quad &= \{(x, z) : \exists\, y \text{ para el cual } (x, y) \in f,\ (y, z) \in f\} \\
&= \left\{(x, z) : \exists\, y \text{ para el cual } x \neq 0,\ y = \tfrac{1}{x^2},\ z = \tfrac{1}{y^2}\right\} \\
&= \left\{(x, z) : x \neq 0,\ z = x^4\right\};
\end{aligned}$$

así, $f \circ f(x) = x^4$. Note que $f \circ f$ es una función; esto no es un accidente.

Teorema 4.39 *Sean f y g funciones. Entonces $g \circ f$ es una función. $g \circ f$ está definida en x si y sólo si f está definida en x y g está definida en $f(x)$, es decir, $dom\, g \circ f = dom\ f \cap f^{-1}(dom\ g)$.*

Demostración:

Se mostrará que $g \circ f$ es una función. Si $(x, z_1) \in g \circ f$ y $(x, z_2) \in g \circ f$ entonces existen y_1, y_2 tales que $(x, y_1) \in f$ y $(y_1, z_1) \in g$, $(x, y_2) \in f$ y $(y_2, z_2) \in g$. Puesto que f es una función, $y_1 = y_2$. Así tenemos que $(y_1, z_1) \in g$ y $(y_1, z_2) \in g$. Entonces $z_1 = z_2$, porque también g es una función.

Por otra parte, $x \in dom\ g \circ f$ si y sólo si existe algún z tal que $(x, z) \in g \circ f$, es decir, hay un y tal que $(x, y) \in f$ y $(y, z) \in g$. Lo anterior se satisface si y sólo si:

$$x \in dom\, f \quad \text{y} \quad y = f(x) \in dom\, g,$$

o sea, $x \in dom\, f$ y $x \in f^{-1}(dom\, g)$. ■

Se desprende inmediatamente el siguiente resultado.

Corolario 4.40 *Si $ran\, f \subseteq dom\, g$, entonces $dom\, g \circ f = dom\, f$.*

Es importante señalar que la composición de funciones siempre está definida, de hecho, si $ran\, f \cap dom\, g = \emptyset$, la composición de f con g es la función vacía,

$g \circ f = \emptyset$. Pero $\emptyset$ es una función de poco interés, por lo cual generalmente se restringe la composición al caso en que $ran\, f \subseteq dom\, g$, por ser el caso verdaderamente interesante. Pero no hay alguna razón para no definir la composición de cualquier par de funciones.

Veamos un ejemplo típico del uso del teorema anterior para encontrar la composición de funciones.

Ejemplo 4.41 Encontrar la composición y el dominio de la composición de las siguientes funciones:

$$f = \left\{(x, x^2 - 1) : x \in \mathbf{R}\right\}, \quad g = \left\{(x, \sqrt{x}) : x \in \mathbf{R},\ x \geq 0\right\}.$$

Determinaremos primero el dominio de $g \circ f$. $dom\, f$ es el conjunto de todos los números reales y $dom\, g = \{x \in \mathbf{R} : x \geq 0\}$. Entonces

$$\begin{aligned} f^{-1}(dom\, g) &= \{x \in \mathbf{R} : f(x) \in dom\, g\} \\ &= \left\{x : x^2 - 1 \geq 0\right\} \\ &= \{x \in \mathbf{R} : x \geq 1\ \vee\ x \leq -1\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$dom\, g \circ f = dom\, f \cap f^{-1}(dom\, g) = \{x \in \mathbf{R} : x \geq 1\ \vee\ x \leq -1\}$$

y

$$\begin{aligned} g \circ f &= \left\{(x, z) : x^2 - 1 \geq 0\ \wedge\ \exists y \in \mathbf{R},\ y = x^2 - 1\ \wedge\ z = \sqrt{y}\right\} \\ &= \left\{(x, \sqrt{x^2 - 1} : x \geq 1\ \vee\ x \leq -1\right\}. \end{aligned}$$

Ahora derivemos algunas propiedades de la composición de funciones.

Teorema 4.42 *Sean $f : A \to B$, $g : B \to C$ y $h : C \to D$ funciones.*

(a) Si $A' \subseteq A$, entonces $g \circ f(A') = g(f(A'))$.

(b) Si $C' \subseteq C$, entonces $(g \circ f)^{-1}(C') = f^{-1}(g^{-1}(C'))$.

(c) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, es decir, la composición de funciones es asociativa.

DEMOSTRACIÓN:

Se dejan como ejercicio las partes *(a)* y *(b)*. Pasaremos a demostrar la parte *(c)*.

$(x, z) \in h \circ (g \circ f)$ si y sólo si existe w tal que $(x, w) \in g \circ f$ y $(w, z) \in h$ si y sólo si existe y tal que $(x, y) \in f$, $(y, w) \in g$ y $(w, z) \in h$ si y sólo si $(x, y) \in f$

y $(y,z) \in h \circ g$ si y sólo si $(x,z) \in (h \circ g) \circ f$. ■

Si f es una función, f^{-1} es una relación, pero no necesariamente una función. Decimos que una función f es *invertible*, si f^{-1} es una función, es decir, la relación

$$f^{-1} = \{(y,x) : (x,y) \in f\},$$

es una función.

Es importante encontrar condiciones necesarias y suficientes para que una función sea invertible.

Definición 4.43 Una función f es llamada *inyectiva* (o *uno a uno*) si $a_1 \in$ *dom* f, $a_2 \in$ *dom* f *y* $a_1 \neq a_2$ implica $f(a_1) \neq f(a_2)$.

La definición anterior se puede expresar en otras palabras diciendo que: $a_1 \in$ *dom* f, $a_2 \in$ *dom* f y $f(a_1) = f(a_2)$ implica $a_1 = a_2$. Así, una función inyectiva asigna diferentes valores para diferentes elementos de su dominio.

Teorema 4.44 *Una función es invertible si y sólo si es inyectiva.*

Demostración:

$\Rightarrow$] Sea f una función invertible entonces f^{-1} es una función. Si $a_1 \in$ *dom* f, $a_2 \in$ *dom* f, y $f(a_1) = f(a_2)$, entonces tenemos que $(f(a_1), a_1) \in f^{-1}$ y $(f(a_2), a_2) \in f^{-1}$, lo cual implica que $a_1 = a_2$. Así, f es inyectiva.

$\Leftarrow$] Sea f una función inyectiva. Si $(a, b_1) \in f^{-1}$ y $(a, b_2) \in f^{-1}$, tenemos que $(b_1, a) \in f$ y $(b_2, a) \in f$. Por lo tanto, $b_1 = b_2$, y así hemos probado que f^{-1} es función. ■

Si consideramos la función $f : X \to \mathbf{R}$, donde $X = \{x \in \mathbf{R} : x \geq 0\}$ y $f(x) = x^2$, podemos demostrar que dicha función es inyectiva, por lo cual f es una función invertible. Pero el dominio de f^{-1} es $\{x \in \mathbf{R} : x \geq 0\}$. De modo que a f^{-1} no la podemos considerar como una función de $\mathbf{R}$ en X tal que $f^{-1} \circ f = Id_X$ y $f \circ f^{-1} = Id_{\mathbf{R}}$. Estamos interesados en hallar una función $g^{-1} : B \to A$ que actúe inversamente con respecto a $g : A \to B$ cuando sea posible; o sea, $g^{-1} \circ g = Id_A$ y $g \circ g^{-1} = Id_B$. Si observamos, el problema de la función $f : X \to \mathbf{R}$ es que su rango no es todo $\mathbf{R}$.

Definición 4.45 Sea $f : A \to B$ una función:

(a) f se llama *sobreyectiva* si $f(A) = B$.

(b) f se llama *biyectiva* si es inyectiva y sobreyectiva.

Notemos que una función $f : A \to B$ es biyectiva si y sólo si para cada $b \in B$, existe un único $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Este $a \in A$ existe por la sobreyectividad de f, y es único por la inyectividad de f.

Ahora, si $f : A \to B$ es una función biyectiva entonces $dom\, f^{-1} = B$, es decir, se puede definir

$$f^{-1} : B \to A$$

por la regla: $f^{-1}(b)$ es el único $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Además, con esto último tenemos que f^{-1} cumple las relaciones:

$$f^{-1} \circ f = Id_A \quad \text{y} \quad f \circ f^{-1} = Id_B,$$

las cuales expresan precisamente que f^{-1} actúa de manera inversa a como lo hace f sobre todo el conjunto A y que f actúa de manera inversa a como lo hace f^{-1} sobre todo el conjunto B. En el Teorema 4.52(c), mostraremos que f^{-1} es única, lo cual nos permite hacer la definición 4.47; antes un útil ejemplo.

Ejemplo 4.46 Para cualquier conjunto A, la función identidad es una biyección en A. Obsérvese que en caso de que $A = \emptyset$, Id_A es la función vacía y que es biyectiva en este (único) caso.

Definición 4.47 Si $f : A \to B$ es una función biyectiva, a la función $f^{-1} : B \to A$ se le llamará *función inversa de* $f : A \to B$.

Note que a $f^{-1} : B \to A$ se le llama función inversa de $f : A \to B$, y no sólo de f, para recalcar el hecho de que f^{-1} depende de los conjuntos A y B.

En seguida daremos múltiples caracterizaciones del concepto de inyectividad y sobreyectividad.

Teorema 4.48 *Sea $f : X \to Y$ una función con $X \neq \emptyset$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) f es inyectiva.
(b) Para todo $x_1 \in X$, $x_2 \in X$, $f(x_1) = f(x_2)$ implica $x_1 = x_2$.
(c) Existe $g : Y \to X$ tal que $g \circ f = Id_X$.
(d) Para cualesquiera $h, k : Z \to X$, $f \circ h = f \circ k$ implica $h = k$.
(e) Para todo $A \subseteq X$, $f^{-1}(f(A)) = A$.
(f) Para cualesquiera $A \subseteq B \subseteq X$, $f(B \setminus A) = f(B) \setminus f(A)$.
(g) Para cualesquiera $A \subseteq X$, $B \subseteq X$, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Demostración:

(a) $\Rightarrow$ *(b)* Obvio.

(b) $\Rightarrow$ *(c)* Sea $x_0 \in X$ y definamos $g : Y \to X$ del siguiente modo:

$$g(y) = \begin{cases} x_0, & \text{si } y \notin f(X) \\ x, & \text{si } y = f(x). \end{cases}$$

g es claramente una función, pues si $(y, x_1) \in g$ y $(y, x_2) \in g$ tenemos dos posibilidades: si $y \notin f(X)$, por definición $x_1 = x_2 = x_0$. Si $y \in f(X)$ entonces $f(x_1) = f(x_2)$ y por *(b)* $x_1 = x_2$.

Luego, para $x \in X$, $g \circ f(x) = g(f(x)) = x$; con lo cual, $g \circ f = Id_X$.

(c) $\Rightarrow$ *(d)* Si $h, k : Z \to X$ son funciones tales que $f \circ h = f \circ k$, entonces por hipótesis existe una función $g : Y \to X$ tal que $g \circ f = Id_X$, con lo cual: $h = Id_X \circ h = (g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h) = g \circ (f \circ k) = (g \circ f) \circ k = Id_X \circ k = k$.

(d) $\Rightarrow$ *(e)* Sea $A \subseteq X$. Sabemos que $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ para cualquier función (Teorema 4.34(g)). Ahora bien, si $x \in f^{-1}(f(A))$ entonces $f(x) \in A$, luego existe $a \in A$ tal que $f(a) = f(x)$.

Sean $h, k : \{1\} \to X$ definidas como $h(1) = a$ y $k(1) = x$, entonces $f \circ h = f \circ k$. Por hipótesis $h = k$, y así $a = x$; con esto concluimos que $A \supseteq f^{-1}(f(A))$.

(e) $\Rightarrow$ *(f)* Sean A y B dos conjuntos tales que $A \subseteq B \subseteq X$ y supongamos que $f(x) \in f(B \setminus A)$ con $x \in B \setminus A$. Entonces $f(x) \in f(B)$; pero como $x \notin A$ y $A = f^{-1}(f(A))$, entonces $x \notin f^{-1}(f(A)$. Esto implica que $f(x) \notin f(A)$; así, $f(x) \in f(B) \setminus f(A)$. Como siempre ocurre $f(B) \setminus f(A) \subseteq f(B \setminus A)$, concluimos entonces que $f(B) \setminus f(A) = f(B \setminus A)$.

(f) $\Rightarrow$ *(g)* Sean $A \subseteq X$ y $B \subseteq X$. Se sabe que $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Si $y \in f(A) \cap f(B)$, entonces $y = f(x)$ con $x \in A$. Si ocurriera $x \notin B$, entonces $x \in X \setminus B$. Por lo cual, $f(x) \in f(X \setminus B) = f(X) \setminus f(B)$, y así, $y = f(x) \notin f(B)$ que es una contradicción. Por lo tanto, $f(x) \in f(B)$ implica $x \in B$, y así $x \in A \cap B$. Por todo lo anterior, $y \in f(A \cap B)$.

(g) $\Rightarrow$ *(a)* Trivial. ■

Teorema 4.49 *Si $f : X \to Y$ es una función entonces, son equivalentes:*

(a) f es sobreyectiva.

(b) Para todo $y \in Y$, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

(c) Para todo subconjunto no vacío A de Y, $f^{-1}(A) \neq \emptyset$.

(d) Para todo subconjunto B de Y, $B = f(f^{-1}(B))$.

(e) Para cualesquiera $h, k : Y \to Z$, $h \circ f = k \circ f$ implica $h = k$.

Demostración:

Las implicaciones *(a)* $\Rightarrow$ *(b)* y *(b)* $\Rightarrow$ *(c)* son obvias.

(c) $\Rightarrow$ *(d)* Sabemos que $f(f^{-1}(B)) = f(X) \cap B \subseteq B$. Si la contención fuese estricta, entonces $A = B \setminus f(f^{-1}(B)) \neq \emptyset$, lo que implica $f^{-1}(A) \neq \emptyset$; con lo cual se deduce que existe un $x \in X$ tal que

$$f(x) \in B \setminus f(f^{-1}(B));$$

pero esto es imposible.

(d) $\Rightarrow$ *(e)* Sean $h, k : Y \to Z$ dos funciones cualesquiera tales que $h \circ f = k \circ f$. Sea $y \in Y$. Como $f(f^{-1}(\{y\})) = \{y\}$, por el Teorema 4.34(a), $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$. Sea $x \in X$ tal que $x \in f^{-1}(\{y\})$; o sea, $f(x) = y$. Tenemos entonces que $h(y) = h(f(x)) = h \circ f(x) = k \circ f(x) = k(f(x)) = k(y)$. Por el Lema 4.35, se sigue que $h = k$.

(e) $\Rightarrow$ *(a)* Si $f : X \to Y$ no es sobreyectiva, defina funciones $h, k : Y \to \{1, 2\}$ por $h = Y \times \{1\}$ y

$$k(y) = \begin{cases} 1, & \text{si } y \in f(X) \\ 2, & \text{si } y \notin f(X). \end{cases}$$

Entonces, $h \circ f = k \circ f$, pero $h \neq k$. ■

La parte (d) del Teorema 4.48 motiva la siguiente definición.

Definición 4.50 Sea $f : X \to Y$ una función.

(a) *A una función $g : Y \to X$ tal que $g \circ f = Id_X$ se le llama inversa izquierda de $f : X \to Y$.*

(b) *A una función $h : Y \to X$ tal que $f \circ h = Id_Y$ se le llama inversa derecha de $f : X \to Y$.*

Es factible pensar que, así como las funciones inyectivas se caracterizan por tener inversa izquierda, las funciones sobreyectivas se caractericen por tener inversa derecha; esta conjetura es correcta, no obstante, en un capítulo posterior veremos que esta proposición es equivalente a uno de los Axiomas de la Teoría de Conjuntos (el Axioma de Elección), por lo cual no es trivial (aunque sí fácil de establecer a partir de ese axioma). Lo que sí es posible demostrar ahora es la siguiente proposición.

Proposición 4.51 *Si $f : X \to Y$ tiene una inversa derecha $g : Y \to X$, entonces f es sobreyectiva.*

Demostración:

Para cualquier $y \in Y$, poniendo $x = g(y)$, se tiene que $f(x) = y$. Por lo tanto, f es sobreyectiva. ■

Teorema 4.52 *Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ dos funciones. Entonces:*

(a) La inyectividad de f y g implica la inyectividad de $g \circ f$.

(b) La sobreyectividad de f y g implica la sobreyectividad de $g \circ f$.

(c) Si $X = Z$, y f y g son tales que

$$g \circ f = Id_X \quad y \quad f \circ g = Id_Y,$$

entonces $g = f^{-1}$, es decir, la inversa de $f : X \to Y$ es única.

Demostración:

(a) Sean $A \subseteq X$ y $B \subseteq X$. Entonces haciendo uso de los Teoremas 4.42(a) y 4.48(g), $g \circ f(A \cap B) = g(f(A \cap B)) = g(f(A) \cap f(B)) = g(f(A)) \cap g(f(B)) = g \circ f(A) \cap g \circ f(B)$. Por lo tanto, $g \circ f$ es inyectiva.

(b) Sea $A \subseteq Z$ un subconjunto no vacío, usemos los Teoremas 4.42(b) y 4.49(c). $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$. Como g es sobreyectiva $g^{-1}(A) \neq \emptyset$, y puesto que f también es sobreyectiva,

$$f^{-1}(g^{-1}(A)) \neq \emptyset.$$

Por lo tanto, $g \circ f$ es sobreyectiva.

(c) Empleando el Teorema 4.48(c) y la Proposición 4.51, obtenemos que f y g también son funciones biyectivas. De aquí se sigue que $dom\, f^{-1} = dom\, g = Y$. Ahora, si $y \in Y$, entonces

$$f(g(y)) = y = f(f^{-1}(y)).$$

Por la inyectividad de f se sigue que $g(x) = f^{-1}(x)$. Concluimos que $g = f^{-1}$, por el Lema 4.35. ■

Una de las razones por las cuales las funciones biyectivas son tan importantes es la que a continuación exponemos. Supongamos que X y Y son dos conjuntos y que $f : X \to Y$ es una función biyectiva entre ellos. Si únicamente estamos interesados en X como conjunto, es decir, sin atender a la naturaleza de sus elementos, entonces podemos considerar a estos dos conjuntos como "*equivalentes*" desde el punto de vista de la Teoría de Conjuntos puesto que cualquier afirmación y construcción de la Teoría de Conjuntos que sea posible realizar con X también se puede realizar con Y. Sólo como una muestra, si Z es otro conjunto y estamos interesados en funciones de X en Z, entonces cualquier función $g : X \to Z$ tiene una única función correspondiente $\widetilde{g} : Y \to Z$, a saber, $\widetilde{g} = g \circ f^{-1}$. Así entonces, podemos "cambiar" nuestro estudio de las funciones de X en Z por el estudio de las funciones de Y en Z. Podríamos dar otros ejemplos que muestren la paridad de afirmaciones o construcciones que podemos realizar con X y Y; sin embargo, creemos que es más conveniente notar que esta paridad se debe al hecho de que la función f traslada uno a uno tanto a los elementos como a los subconjuntos de X a Y. Por ende, reiteramos que desde el punto de vista de la Teoría de Conjuntos, aunque X y Y sean objetos (posiblemente) distintos, ellos pueden considerarse "equivalentes" ya que son, salvo por "sus nombres", indistinguibles.

Definición 4.53 (a) Las funciones f y g son llamadas *compatibles* si $f(x) = g(x)$ para todo $x \in dom\, f \cap dom\, g$.

(b) Un conjunto de funciones $\mathcal{F}$ es llamado *sistema compatible de funciones* si cualesquiera dos funciones $f \in \mathcal{F}$ y $g \in \mathcal{F}$ son compatibles.

Lema 4.54 *(a) Las funciones f y g son compatibles si y sólo si $f \cup g$ es una función.*

(b) Las funciones f y g son compatibles si y sólo si

$$f\mid_{dom\, f \cap dom\, g} = g\mid_{dom\, f \cap dom\, g}.$$

DEMOSTRACIÓN:

(a) $\Rightarrow$] Sean $(x,y) \in f \cup g$ y $(x,z) \in f \cup g$, entonces $x \in dom\, f \cup dom\, g$.

Si $x \in dom\, f \bigtriangleup dom\, g$, necesariamente $(x,y) \in f \setminus g$ y $(x,z) \in f \setminus g$. O bien, $(x,y) \in g \setminus f$ y $(x,z) \in g \setminus f$, y en este caso, se concluye que $y = z$.

Si por el contrario $x \in dom\, f \cap dom\, g$, por hipótesis $f(x) = g(x)$; así, $y = f(x) = z$. Por lo tanto, $f \cup g$ es función.

$\Leftarrow$] Sea $x \in dom\, f \cap dom\, g$. Entonces $(x, f(x)) \in f \cup g$ y $(x, g(x)) \in f \cup g$. Como $f \cup g$ es función, se sigue que $f(x) = g(x)$.

(b) Ejercicio. ■

El siguiente teorema nos dice que las funciones en un sistema compatible pueden reunirse en una única función la cual extiende a cada función que es elemento del sistema.

Teorema 4.55 *Si $\mathcal{F}$ es un sistema de funciones compatibles, entonces $\bigcup \mathcal{F}$ es una función con dom $\bigcup \mathcal{F} = \bigcup \{dom\, f : f \in F\}$. Además, la función $\bigcup \mathcal{F}$ extiende a cada $f \in \mathcal{F}$.*

DEMOSTRACIÓN:

Claramente $\bigcup \mathcal{F}$ es una relación; probaremos que es una función. Si $(a,b) \in \bigcup \mathcal{F}$ y $(a,c) \in \bigcup \mathcal{F}$, hay funciones $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ tales que $(a,b) \in f_1$ y $(a,c) \in f_2$.

Pero f_1 y f_2 son compatibles, y como $(a,b) \in f_1 \cup f_2$, $(a,c) \in f_1 \cup f_2$ y $f_1 \cup f_2$ es una función, entonces $b = c$.

Luego, $x \in dom \bigcup \mathcal{F}$ si y sólo si para algún y, $(x,y) \in \bigcup \mathcal{F}$ si y sólo si $(x,y) \in f$ para alguna $f \in \mathcal{F}$ si y sólo si $x \in dom\, f$ si y sólo si $x \in \bigcup \{dom\, f : f \in F\}$. Por lo tanto, $\bigcup \mathcal{F} = \bigcup \{dom\, f : f \in F\}$. Claramente $\bigcup \mathcal{F}$ extiende a cada $f \in \mathcal{F}$. ■

Para finalizar esta sección tenemos la siguiente definición.

Definición 4.56 Sean A y B conjuntos, el conjunto de todas las funciones de A en B es denotado por B^A.

De hecho, nosotros deberíamos mostrar que tal conjunto existe, pero nos basta observar que $B^A \subseteq \mathcal{P}(A \times B)$.

Ejercicios 4.2

1. Sea $f : X \to Y$ una función. Pruebe que $F : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ y $G : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ definidas por:

$$F(A) = f(A), \qquad G(A) = f^{-1}(A),$$

   son funciones.

2. Completar la demostración del Teorema 4.34.

3. Justifique los procedimientos de los Ejemplos 4.38 y 4.41.

4. Encuentre la función inversa de la función del Ejemplo 4.38.

5. Sean $A \subseteq X$ y sea $f : X \to Y$ una función. Sea $i : A \hookrightarrow X$ la inclusión. Muestre que:

   (a) $f\,|_A = f \circ i$.

   (b) Pongamos $g = f\,|_A$. Entonces $g^{-1}(B) = A \cap f^{-1}(B)$ para cada $B \subseteq Y$.

6. Las funciones f_i, $i = 1, 2, 3, 4$, están definidas como sigue:

$$\begin{aligned} f_1 &= \{(x, 2x-1) : x \in \mathbf{R}\} \\ f_2 &= \{(x, \sqrt{x}) : x \neq 0\} \\ f_3 &= \{(x, \sqrt[3]{x}) : x \in \mathbf{R}\} \\ f_4 &= \left\{(x, \tfrac{1}{x}) : x \in \mathbf{R},\ x \neq 0\right\} \end{aligned}$$

   Describa cada una de las siguientes funciones y determine sus dominios y rangos: $f_2 \circ f_1$, $f_1 \circ f_2$, $f_3 \circ f_1$, $f_1 \circ f_3$, $f_4 \circ f_1$, $f_1 \circ f_4$, $f_2 \circ f_4$, $f_4 \circ f_2$, $f_3 \circ f_4$.

7. Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$.

   (a) Si $g \circ f$ es inyectiva, qué se puede decir de la inyectividad de f y de g.

   (b) Si $g \circ f$ es sobreyectiva, qué se puede decir de la sobreyectividad de f y de g.

8. Sean $f : A \to C$ y $g : A \to B$ funciones. Demostrar que existe una función $h : B \to C$ tal que $f = h \circ g$ si y sólo si para cada $x, y \in A$, $g(x) = g(y)$ implica $f(x) = f(y)$.

9. Pruebe la siguiente importante propiedad del producto cartesiano $A \times B$ y de las proyecciones p_1 y p_2. Si $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$, entonces para cualquier conjunto C y cualesquiera funciones $f_1 : C \to A$ y $f_2 : C \to B$ existe una única función $f : C \to A \times B$ tal que $f_1 = p_1 \circ f$ y $f_2 = p_2 \circ f$. Las funciones f_1 y f_2 se llaman las *funciones coordenadas* de f.

10. Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ dos funciones. Demuestre que X y Y pueden expresarse como unión de subconjuntos ajenos, es decir, $X = X_1 \cup X_2$ con $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ y $Y = Y_1 \cup Y_2$ con $Y_1 \cap Y_2$, tales que $f(X_1) = Y_1$ y $g(Y_2) = X_2$. (Sugerencia: para cada $A \subseteq X$, sea $Q(A) = X \setminus g(Y \setminus f(A))$. Tómese $X_1 = \bigcap \{Q(A) : Q(A) \subseteq A\}$.)

11. (a) Dar un ejemplo de una función que tenga inversa izquierda pero no inversa derecha.

    (b) Dar un ejemplo de una función que tenga inversa derecha pero no inversa izquierda.

    (c) Dar un ejemplo de una función que tenga dos inversas izquierdas.

    (d) Dar un ejemplo de una función que tenga dos inversas derechas.

(e) Muestre que si $f : X \to Y$ tiene inversa derecha e izquierda entonces es biyectiva.

12. Pruebe que las funciones del Ejercicio 6 son inyectivas.

13. Completar la demostración del Teorema 4.42.

14. Muestre que si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son funciones biyectivas, entonces $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

15. Dar un ejemplo de una función f y un conjunto A, tal que $f \cap A^2 \neq f\mid_A$.

16. Si f es una función inyectiva muestre que
$$f\left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha\in I} f(A_\alpha).$$

17. Probar el Lema 4.54(b).

18. Muestre que B^A existe.

19. Pruebe que el conjunto de todas las funciones desde A hacia B es igual a $\bigcup_{X\subseteq A} B^X$.

20. Demuestre la siguiente forma general de distribución:
$$\bigcap_{a\in A}\left(\bigcup_{b\in B} F_{a,b}\right) = \bigcup_{f\in B^A}\left(\bigcap_{a\in A} F_{a,f(a)}\right),$$
suponiendo que $F_{a,b_1} \cap F_{a,b_2} = \emptyset$ para todo $a \in A$ y cualesquiera $b_1, b_2 \in B$ con $b_1 \neq b_2$. (Sugerencia: Sea L el conjunto en el lado izquierdo de la igualdad y R el conjunto en el lado derecho. $F_{a,f(a)} \subseteq \bigcup_{b\in B} F_{a,b}$; por lo tanto, $\bigcap_{a\in A} F_{a,f(a)} \subseteq \bigcap_{a\in A}\left(\bigcup_{b\in B} F_{a,b}\right) = L$, y así finalmente $R \subseteq L$. Para probar que $L \subseteq R$, tome $x \in L$. Defina $(a, b) \in f$ si y sólo si $x \in F_{a,b}$. Pruebe que f es una función de A en B para la cual $x \in \bigcap_{a\in A} F_{a,f(a)}$; así, $x \in R$.)

4.3 Productos Cartesianos Arbitrarios

En esta pequeña sección se generaliza el producto cartesiano de conjuntos en términos de funciones. Consideraremos primero casos especiales.

Dados un conjunto no vacío X y un número natural $m \geq 2$, definimos una *m-ada* de elementos de X como una función

$$x : \{1, 2, \ldots, m\} \to X.$$

Si x es una m-ada, es conveniente denotar el valor de x en $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ por x_i en lugar de $x(i)$. Además, representamos la función x por el símbolo

$$(x_1, x_2, \ldots, x_m).$$

En la Sección 3.2 definimos el producto cartesiano de dos conjuntos, introdujimos con base en aquella definición el producto cartesiano de tres conjuntos y únicamente sugerimos la generalización a cuatro conjuntos. En la siguiente definición haremos la primera generalización definiendo el producto cartesiano de una familia de m conjuntos, para cualquier $m \in \mathbf{N}$.

Definición 4.57 Supongamos que $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ está indizada sobre el conjunto $\{1, 2, \ldots, , m\}$. El *producto cartesiano de esta familia indizada de conjuntos* denotado por

$$\prod_{i=1}^{m} A_i \qquad \text{o} \qquad A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m$$

es el conjunto de todas las m-adas $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m)$ de elementos de $X = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$ tales que $x_i \in A_i$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Ejemplo 4.58 Tenemos hasta este momento dos definiciones para el símbolo $A \times B$. Una definición es la dada en la Sección 3.2; según ésta, $A \times B$ denota el conjunto de todos los pares ordenados (a, b) tales que $a \in A$ y $b \in B$. La segunda definición, presentada en esta sección, define a $A \times B$ como el conjunto de todas las funciones $x : \{1, 2\} \to A \cup B$ tales que $x_1 \in A$ y $x_2 \in B$. Hay una obvia correspondencia biyectiva entre estos dos conjuntos: al par (a, b) le hacemos corresponder la función $x{:}\{1, 2\} \to A \cup B$ definida como $x_1 = a$ y $x_2 = b$. Hemos acordado denotar a esta función con el símbolo (x_1, x_2). Esta notación sugiere en sí misma la correspondencia mencionada.

Podemos generalizar aún más, si $\{A_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ es un sistema de conjuntos no vacíos indizado sobre el conjunto de los números naturales $\mathbf{N}$, es factible definir el producto cartesiano de la familia $\{A_n\}$ como:

$$\prod_{n=0}^{\infty} A_n = \left\{ x : \mathbf{N} \to \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n : \forall n \in \mathbf{N},\ x_n \in A_n \right\}$$

y como antes representamos las funciones x como:

$$(x_0, x_1, \ldots, x_i, \ldots) \qquad \text{o} \qquad (x_n)_{n=0}^{\infty}.$$

Entonces los elementos de $\prod_{n=0}^{\infty} A_n$ son sucesiones $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ de elementos en $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ cuyo i-ésimo término, $x_i = x(i)$, pertenece a A_i.

Note que las definiciones anteriores no requieren que los conjuntos A_i sean diferentes uno del otro. De hecho, ellos pueden ser todos iguales a un mismo conjunto A. En este caso, el producto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m$ es justamente el conjunto A^m de m-adas de elementos en A, y el producto $A_1 \times A_2 \times \cdots$ es justamente el conjunto $A^{\mathbf{N}}$ de todas las sucesiones de elementos en A.

Ejemplo 4.59 $\mathbf{R}^m$ denota el espacio euclidiano m-dimensional. Análogamente, $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ es algunas veces llamado espacio euclidiano de dimensión infinita. Éste es el conjunto de todas las sucesiones (como se definen en los cursos Cálculo Diferencial e Integral) de números reales; o sea, el conjunto de todas las funciones $x : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$.

Ahora pasaremos a la definición más general de producto cartesiano, la cual incluirá estos casos especiales. Primero haremos preciso el significado de *familia indizada de conjuntos*, un concepto que hasta ahora no hemos definido formalmente.

Definición 4.60 Sea $\mathcal{A}$ un sistema de conjuntos. Una *función indizadora* para $\mathcal{A}$ es una función sobreyectiva $A : I \to \mathcal{A}$, donde I es un conjunto no vacío. I es llamado conjunto de índices. La colección $\mathcal{A}$, junto con la función indizadora, es llamada *familia indizada de conjuntos.*

Ejemplo 4.61 Cualquier familia no vacía de conjuntos puede considerarse como una familia indizada de conjuntos, donde la función indizadora es $S : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ dada por $S_A = A$. Ver Observación 3.35.

El principal uso de las funciones indizadoras es para definir el producto cartesiano de familias arbitrarias de conjuntos.

Definición 4.62 Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia indizada de conjuntos. El *producto cartesiano de la familia* $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$, denotado por

$$\prod_{\alpha \in I} A_\alpha,$$

es definido como el conjunto de todas las funciones $x : I \to \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$, representadas por $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$, tales que $x(\alpha) = x_\alpha \in A_\alpha$ para cada $\alpha \in I$. Si $\beta \in I$, el conjunto A_β es llamado el *β-ésimo factor* del producto $\prod_{\alpha\in I} A_\alpha$. La *coordenada β-ésima* de un elemento $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ en el producto $\prod_{\alpha\in I} A_\alpha$ es por definición $x_\beta = x(\beta)$.

Estamos definiendo un nuevo conjunto; un ejercicio de esta sección es probar que $\prod_{\alpha\in I} A_\alpha$ existe para cualquier familia de conjuntos $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ en donde I es un conjunto no vacío. Observemos únicamente que si en la familia $\{B_a\}_{a\in A}$ cada $B_a = B$, el producto $\prod_{a\in A} B_a$ es justamente B^A.

Ejemplo 4.63 Si cada A_α tiene exactamente un elemento, entonces $\prod_{\alpha\in I} A_\alpha$ tiene un elemento.

Ejemplo 4.64 Si $I \neq \emptyset$ y algún $A_\alpha = \emptyset$, entonces $\prod_{\alpha\in I} A_\alpha = \emptyset$.

Ejemplo 4.65 Considere $A_n = \{0, 1\}$ para cada $n \in \mathbf{N}$. El producto cartesiano $\prod_{n\in\mathbf{N}} A_n$ es precisamente el conjunto de todas las sucesiones de ceros y unos, a veces llamado *Conjunto de Cantor*.

Sean $I \neq \emptyset$ y $A_\alpha \neq \emptyset$ para cada $\alpha \in I$. Hasta este momento no podemos asegurar que $\prod_{\alpha\in I} A_\alpha \neq \emptyset$. Aunque intuitivamente esto parece cierto, no es posible demostrarlo sin usar el Axioma de Elección, el cual se abordará en un capítulo posterior. Por el momento *supondremos que $\prod_{\alpha\in I} A_\alpha \neq \emptyset$ siempre que $I \neq \emptyset$ y $A_\alpha \neq \emptyset$ para cada $\alpha \in I$.*

Definición 4.66 Si $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es una familia no vacía de conjuntos no vacíos, se define la *proyección en la β-ésima coordenada* como la función:

$$p_\beta : \prod_{\alpha\in I} A_\alpha \to A_\beta$$

dada por

$$p_\beta\left((x_\alpha)_{\alpha\in I}\right) = x_\beta.$$

Es decir, si $x \in \prod_{\alpha\in I} A_\alpha$, entonces $p_\beta(x) = x(\beta) = x_\beta$.

Con respecto al álgebra de productos cartesianos tenemos el siguiente teorema cuya demostración se deja como un ejercicio.

Teorema 4.67 *Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia indizada de conjuntos no vacíos, y sean A_α y B_α subconjuntos no vacíos de X_α, para cada $\alpha \in I$. Entonces:*

(a) $\prod_{\alpha\in I} A_\alpha \cap \prod_{\alpha\in I} B_\alpha = \prod_{\alpha\in I}(A_\alpha \cap B_\alpha)$.

(b) $\prod_{\alpha\in I} A_\alpha \cup \prod_{\alpha\in I} B_\alpha \subseteq \prod_{\alpha\in I}(A_\alpha \cup B_\alpha)$.

Para $\beta \in I$ y $C_\beta \subseteq X_\beta$, denotemos a $p_\beta^{-1}(C_\beta)$ por $\langle C_\beta \rangle$; éste es el "gajo" en $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ donde cada factor es X_α excepto el β-ésimo, el cual es C_β. Similarmente, para una cantidad finita de índices $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ y los conjuntos

$$C_{\alpha_1} \subseteq X_{\alpha_1}, \ldots, C_{\alpha_m} \subseteq X_{\alpha_m},$$

el subconjunto $\bigcap_{i=1}^m \langle C_{\alpha_i} \rangle = \bigcap_{i=1}^m p_{\alpha_i}^{-1}(C_{\alpha_i})$ es denotado por

$$\langle C_{\alpha_1}, \ldots, C_{\alpha_i} \rangle .$$

Estas notaciones nos permiten formular el siguiente corolario.

Corolario 4.68 *En* $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$,
(a) $\prod_{\alpha\in I} C_\alpha = \bigcap_{\alpha\in I} \langle C_\alpha \rangle$.
(b) $(\prod_{\alpha\in I} X_\alpha) \setminus \langle C_\beta \rangle = \langle X_\beta \setminus C_\beta \rangle$.
(c) $(\prod_{\alpha\in I} X_\alpha) \setminus (\prod_{\alpha\in I} C_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in I} \langle X_\alpha \setminus C_\alpha \rangle$.

DEMOSTRACIÓN:

$c \in \prod_{\alpha\in I} C_\alpha$ si y sólo si para cada $\alpha \in I$, $p_\alpha(c) \in C_\alpha$ si y sólo si para cada $\alpha \in I$, $c \in p_\alpha^{-1}(C_\alpha)$ si y sólo si $c \in \bigcap_{\alpha\in I} \langle C_\alpha \rangle$. Esto establece *(a)*; *(b)* se prueba de manera similar a *(a)*, y *(c)* se sigue de *(a)* y *(b)* usando el Teorema 3.43. ■

Ejercicios 4.3

1. Muestre que existe una correspondencia biyectiva entre $A \times B$ y $B \times A$.

2. Sea $A \times B \times C$ el producto cartesiano de tres conjuntos tal como fue definido en la Sección 3.2, y sea $(A \times B \times C)'$ el producto cartesiano de los tres mismos conjuntos como fue definido en esta sección. Pruebe que existe una biyección $f : A \times B \times C \to (A \times B \times C)'$.

3. Justifique los ejemplos 4.63, 4.64 y 4.65.

4. Pruebe el recíproco del Ejemplo 4.64.

5. (a) Demuestre que existen biyecciones entre $A \times (B \times C)$ y $(A \times B) \times C$.
   (b) Muestre que si $n > 1$, entonces hay una función biyectiva de

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \quad \text{en} \quad (A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_{n-1}) \times A_n.$$

(c) Sea I un conjunto de índices. Pongamos $I = J \cup K$, donde J y K son ajenos y no vacíos. Pruebe que existe una función biyectiva de $\prod_{\alpha \in I} A_\alpha$ en $\prod_{\alpha \in J} A_\alpha \times \prod_{\alpha \in K} A_\alpha$.

6. Sea $I \neq \emptyset$ un conjunto de índices. Considere dos familias indizadas $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ y $\{B_\alpha\}_{\alpha \in I}$. Demuestre lo siguiente:

   (a) Si $A_\alpha \subseteq B_\alpha$ para cada $\alpha \in I$, entonces
   $$\prod_{\alpha \in I} A_\alpha \subseteq \prod_{\alpha \in I} B_\alpha.$$

   (b) El recíproco de (a) se cumple si $\prod_{\alpha \in I} A_\alpha \neq \emptyset$.

7. Pruebe que si $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una familia indizada de conjuntos no vacíos, entonces para cualquier conjunto X y cualquier familia $\{f_\alpha\}$ de funciones $f_\alpha : X \to A_\alpha$, existe una única función
   $$f : X \to \prod_{\alpha \in I} A_\alpha$$
   tal que para cada $\alpha \in I$, $f_\alpha = p_\alpha \circ f$. Las funciones f_α se llaman funciones coordenadas de f, y a veces f se denota por $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ o $\prod f_\alpha$ (ver Ejercicio 4.2.9).

8. Sean m, n enteros positivos y sea $X \neq \emptyset$.

   (a) Para $m \leq n$, encuentre una función inyectiva $f : X^m \to X^n$.
   (b) Encuentre una función biyectiva $g : X^m \times X^n \to X^{m+n}$.
   (c) Encuentre una función inyectiva $h : X^n \to X^{\mathbf{N}}$.
   (d) Encuentre una función biyectiva $k : X^n \times X^{\mathbf{N}} \to X^{\mathbf{N}}$.
   (e) Encuentre una función biyectiva $l : X^{\mathbf{N}} \times X^{\mathbf{N}} \to X^{\mathbf{N}}$.
   (f) Si $A \subseteq B$, encuentre una función inyectiva $m : X^A \to X^B$.

9. Pruebe el Teorema 4.67.

10. Pruebe las partes (b) y (c) del Corolario 4.68.

11. Demuestre que $\prod_{\alpha \in I} A_\alpha \setminus \prod_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} Q_\alpha$, donde cada Q_β es un producto cuyo factor $\alpha \neq \beta$ es A_α, y el β-ésimo factor es $A_\beta \setminus B_\beta$.

12. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ pueden ser expresados como el producto cartesiano de subconjuntos de $\mathbf{R}$?

(a) $\{x = (x_n)_{n=0}^{\infty} : x_n \text{ es entero para cada } n \in \mathbf{N}\}$,
(b) $\{x = (x_n)_{n=0}^{\infty} : x_n \geq n \text{ para cada } n \in \mathbf{N}\}$,
(c) $\{x = (x_n)_{n=0}^{\infty} : x_n \text{ es un entero para cada } n \geq 100\}$,
(d) $\{x = (x_n)_{n=0}^{\infty} : x_2 = x_3\}$.

4.4 Equivalencias y Particiones

En esta sección abordaremos dos importantes conceptos. Las nociones de relación de equivalencia y de clases de equivalencia, que fueron primeramente estudiadas en su plena generalidad por Frege [F_3] en 1884.

Definición 4.69 Sea R una relación en A.
(a) R es llamada *reflexiva en* A*,* si para todo $a \in A$*,* aRa*.*
(b)[2] R es llamada *simétrica en* A*,* si para todo $a, b \in A$*,* aRb implica bRa*.*
(c) R es llamada *transitiva en* A*,* si para todo $a, b, c \in A$*,* aRb *y* bRc implica aRc*.*

Definición 4.70 Una relación R se llama *de equivalencia en* A*,* si es reflexiva simétrica y transitiva en A.

Generalmente una relación de equivalencia en A se denota por E, $\equiv$, $\cong$, $\approx$, o $\sim$. Cuando dos elementos $a, b \in A$ satisfacen aEb se dice que a es E-equivalente a b o que a es equivalente a b módulo E. Observe que si E es una relación de equivalencia en A entonces el dominio de E es igual a A; en efecto, la reflexividad implica que para cualquier $a \in A$, $(a, a) \in E$, es decir, $a \in dom\, E$. Por otro lado como E es una relación en A, entonces $E \subseteq A \times A$, por lo que $dom\, E \subseteq A$. Por lo tanto, $dom\, E = A$.

Ejemplo 4.71 Cada una de las relaciones siguientes satisfacen exactamente dos de las propiedades de la Definición 4.69 y, por tanto, no son de equivalencia.
(a) La relación $I^2 = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\right\}$ en $\mathbf{R}$*,* no es reflexiva*.*
(b) La relación $R_1 = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \leq y\right\}$ en $\mathbf{R}$*,* no es simétrica.
(c) La relación $R_2 = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |x - y| \leq 1\right\}$ en $\mathbf{R}$ no es transitiva.

[2] $a, b \in A$ significa $a \in A$ y $b \in A$.

Ejemplo 4.72 La relación vacía en un conjunto A es simétrica y transitiva, pero no reflexiva salvo que $A = \emptyset$.

Ejemplo 4.73 Sea P el conjunto de todas las personas que viven en la tierra. Decimos que una persona p es equivalente a q $(p \cong q)$ si ambos p y q viven en el mismo país. Trivialmente $\cong$ es reflexiva, simétrica y transitiva en P.

Note que el conjunto P del ejemplo anterior puede ser "partido" en clases de elementos mutuamente equivalentes; toda la gente que vive en México forman una de estas clases, todas las personas que viven en Francia forman otra clase, etc. Todos los miembros de una misma clase son equivalentes. Las clases de equivalencia corresponden exactamente a los diferentes países.

Ejemplo 4.74 Defina la relación $\equiv$ en el conjunto de los enteros $\mathbf{Z}$ como sigue: $x \equiv y$ si y sólo si $y - x$ es divisible[3] por 2. Se puede verificar fácilmente que $\equiv$ cumple (a), (b) y (c) de la Definición 4.69, es decir, $\equiv$ es una equivalencia.

Nuevamente el conjunto $\mathbf{Z}$, puede ser dividido en clases de equivalencia bajo $\equiv$. En este caso, hay dos clases de equivalencia: el conjunto de los enteros pares y el conjunto de los enteros impares. Cualesquiera dos pares o cualesquiera dos impares están relacionados, pero nunca un par está relacionado con un impar.

Los ejemplos anteriores reflejan una regla general; una relación de equivalencia en un conjunto A genera una partición del conjunto A en clases de equivalencia; recíprocamente, dada una partición en A hay una equivalencia en A determinada por la partición de A.

Definición 4.75 Sea E una equivalencia en A y sea $a \in A$. La *clase de equivalencia de a módulo E* es el conjunto

$$[a] = \{x \in A : xEa\}.$$

Obsérvese que efectivamente lo que hemos llamado clase de equivalencia de a, es un conjunto. Por el peso de la tradición histórica llamamos clase a $[a]$, aquí el término *clase* es diferente al usado en la Convención 2.5. Es conveniente también notar que para todo $a \in A$, $[a] \neq \emptyset$, pues al menos $a \in [a]$.

Cuando se trabaja con varias relaciones en un mismo conjunto A, es preferible emplear la notación Ea para denotar la clase de equivalencia de a módulo E.

---

[3] m es divisible por n si existe $k \in \mathbf{Z}$ tal que $m = k \cdot n$.

Ejemplo 4.76 En $\mathbf{Z}$ se define la congruencia módulo n como $a \equiv b \bmod n$ si y sólo si $b - a$ es divisible por n. $\equiv$ es una relación de equivalencia y la clase de equivalencia de $a \in \mathbf{Z}$ es el conjunto $\{a + kn : k \in \mathbf{Z}\}$.

Lema 4.77 *Sean E una equivalencia en A y $a, b \in A$.*
(a) a es equivalente a b módulo E si y sólo si $[a] = [b]$.
(b) a no es equivalente a b módulo E si y sólo si $[a] \cap [b] = \emptyset$.

Demostración:

(a) Supóngase que aEb. Sea $x \in [a]$, entonces xEa y aEb. Por la transitividad de E, xEb, lo que significa $x \in [b]$. Similarmente $x \in [b]$ implica $x \in [a]$. Así, $[a] = [b]$.

(b) Supongamos que no ocurre aEb, y que existe $x \in [a] \cap [b]$. Entonces xEa y xEb, y en virtud de la reflexividad y transitividad de E, aEb. Esto contradice el supuesto.

Por último supongamos que $[a] \cap [b] = \emptyset$. Si ocurriera aEb, entonces $a \in [b]$. Pero $a \in [a]$, lo que contradice la relación $[a] \cap [b] = \emptyset$. ■

Definición 4.78 Una familia de conjuntos $\mathcal{F}$ no vacíos se llama *partición de* A si:

(a) Los conjuntos que forman $\mathcal{F}$ son ajenos dos a dos, es decir, $C, D \in \mathcal{F}$ y $C \neq D$ implica $C \cap D = \emptyset$.

(b) La unión de $\mathcal{F}$ es A, es decir, $A = \bigcup \mathcal{F}$.

Definición 4.79 Sea E una relación de equivalencia en A. La familia de todas las clases de equivalencia módulo E es denotada por A/E y

$$A/E = \{[a] : a \in A\}.$$

Usualmente a A/E se le llama *conjunto cociente de A por la relación E*.

Teorema 4.80 *Sea E una equivalencia, entonces A/E es una partición de A.*

Demostración:

La parte (a) de la Definición 4.78 se sigue del Lema 4.77: si $[a] \neq [b]$, entonces a y b no son equivalentes módulo E, así $[a] \cap [b] = \emptyset$. Para probar (b), note que $A = \bigcup A/E$ porque $a \in [a]$ para cada $a \in A$. Además, por la misma razón, no hay clases de equivalencia vacías. ■

Definición 4.81 Sea $\mathcal{F}$ una partición de A. La relación $E_{\mathcal{F}}$ determinada por $\mathcal{F}$ es definida por:

$$E_{\mathcal{F}} = \{(a,b) \in A \times A : \exists B \in \mathcal{F} \text{ tal que } a,b \in B\}.$$

La definición de la relación $E_{\mathcal{F}}$ puede hacerse en otras palabras: $a, b \in A$ están $E_{\mathcal{F}}$-relacionados si y sólo si ellos pertenecen al mismo elemento de la partición $\mathcal{F}$.

Teorema 4.82 *Sea $\mathcal{F}$ una partición de A. Entonces $E_{\mathcal{F}}$ es una relación de equivalencia en A.*

DEMOSTRACIÓN:

(a) Reflexividad. Sea $a \in A$. Puesto que $A = \bigcup \mathcal{F}$, entonces existe $C \in \mathcal{F}$ tal que $a \in C$, así; $(a,a) \in E_{\mathcal{F}}$.

(b) Simetría. Supóngase que $(a,b) \in E_{\mathcal{F}}$, entonces existe $C \in \mathcal{F}$ tal que $a \in C$ y $b \in C$. Por lo cual $b \in C$ y $a \in C$; lo cual implica $(b,a) \in E_{\mathcal{F}}$.

(c) Transitividad. Supongamos que $(a,b) \in E_{\mathcal{F}}$ y $(b,c) \in E_{\mathcal{F}}$, entonces existen conjuntos $C, D \in \mathcal{F}$ tales que $a, b \in C$ y $b, c \in D$. Como los elementos de $\mathcal{F}$ son mutuamente ajenos entonces $D = C$, por lo que $a, c \in D$ y así $(a,c) \in E_{\mathcal{F}}$.
■

El siguiente teorema, que establece la relación entre equivalencias y particiones, se demuestra de modo análogo.

Teorema 4.83 *(a) Si E es una relación de equivalencia en A y $\mathcal{F} = A/E$, entonces $E = E_{\mathcal{F}}$.*

(b) Si $\mathcal{F}$ es una partición de A y $E_{\mathcal{F}}$ es la correspondiente relación de equivalencia determinada por $\mathcal{F}$, entonces $\mathcal{F} = A/E_{\mathcal{F}}$.

Así las relaciones de equivalencia y las particiones son dos descripciones diferentes del mismo concepto. Toda equivalencia E determina una partición $\mathcal{F} = A/E$. La equivalencia $E_{\mathcal{F}}$ determinada por la partición $\mathcal{F} = A/E$ es idéntica a la original. Recíprocamente, cada partición determina una relación de equivalencia; cuando formamos las clases de equivalencia módulo $E_{\mathcal{F}}$, recobramos la partición original.

Cuando trabajamos con equivalencias o particiones, es muy conveniente tener un conjunto que consista precisamente de un elemento de cada clase de equivalencia.

Definición 4.84 Sea E una relación de equivalencia en A. Un conjunto $X \subseteq A$ es llamado *conjunto de representantes para las clases de equivalencia módulo*

E (o para una partición $\mathcal{F}$), si para todo $C \in A/E$ *($C \in \mathcal{F}$),* $X \cap C = \{a\}$ para algún $a \in C$.

Ejemplo 4.85 Para la relación de equivalencia definida en el Ejemplo 4.73, el conjunto X de los presidentes o jefes de estado de cada país son un conjunto de representantes. El conjunto $X = \{0, 1\}$ lo es para la relación de equivalencia del Ejemplo 4.74.

¿Cualquier partición tiene un conjunto de representantes? Intuitivamente la respuesta es sí, pero, nuevamente, sin el Axioma de Elección, es imposible probar tal afirmación. Es decir, necesitamos usar el Axioma de Elección para demostrar la existencia de un conjunto de representantes, salvo para relaciones simples. En el siguiente ejemplo se muestra una relación de equivalencia para la cual la existencia de un conjunto de representantes no es obvia.

Ejemplo 4.86 Sea $I = \{x \in \mathbf{R} : 0 \leq x \leq 1\}$. La relación $\equiv$ definida por $a \equiv b$ si y sólo si la diferencia $a - b$ es un número racional, es una relación de equivalencia.[4]

Definición 4.87 Sean A un conjunto y E una relación de equivalencia en A. La función que asigna a cada elemento de A su clase de equivalencia módulo E, es decir, $p_E : A \to A/E$ tal que $p_E(a) = Ea$, se llama *función proyección* o *proyección natural.*

El que $p_E : A \to A/E$ sea una función puede deducirse del Lema 4.77; en efecto, para $a \in A$, $(a, Eb) \in p_E$ y $(a, Ec) \in p_E$ implica $a \in Eb$ y $a \in Ec$ con lo cual $Eb \cap Ec \neq \emptyset$; así $Eb = Ec$. Claramente p_E es una función sobreyectiva, pero en general no es inyectiva (puesto que $Ea = Eb$ siempre que aEb).

Definición 4.88 Sean A, B dos conjuntos y sean R, S relaciones de equivalencia en A y en B, respectivamente. Una función $f : A \to B$ *preserva las relaciones R y S*, si aRb implica $f(a)Sf(b)$.

Teorema 4.89 *Sea $f : A \to B$ una función que preserva las relaciones R y S. Entonces existe una única función $f_* : A/R \to B/S$ tal que $p_S \circ f = f_* \circ p_R$. A f_* se le llama función inducida por f en "el paso al cociente".*

[4] Este ejemplo se debe a Vitali [V] quien probó que ninguno de los conjuntos de representantes de la relación definida en el ejemplo es medible según Lebesgue (ver Ejemplo 8.18).

Demostración:

Definamos $f_* : A/R \to B/S$ como $f_*(Ra) = Sf(a)$ para cada $Ra \in A/R$. Veamos primero que f_* está bien definida. La función f_* asigna a Ra el único (por el Lema 4.77) elemento $Sb \in B/S$ tal que $f(a) \in Sb$. Así entonces, para ver que f_* está bien definida es suficiente con mostrar que la clase $Sf(a)$ no depende del representante a seleccionado. Si $Ra = Ra'$, por el Lema 4.77, aRa'. Puesto que f preserva relaciones, tenemos que $f(a)Sf(a')$. Por lo tanto, f_* está unívocamente definida. El dominio de f_* es A/R ya que A es el dominio de f y p_R es sobreyectiva.

Por otro lado,

$$(p_S \circ f)(a) = p_S(f(a)) = Sf(a) = f_*(Ra) = f_*(p_R(a)) = (f_* \circ p_R)(a),$$

lo cual significa que $p_S \circ f = f_* \circ p_R$ (véase el Lema 4.35). Finalmente, f_* es única puesto que p_R es sobreyectiva: si g_* fuera otra función tal que $p_S \circ f = g_* \circ p_R$, entonces $f_* \circ p_R = g_* \circ p_R$ y, por el Teorema 4.49(e), $f_* = g_*$. Por lo tanto, que f_* es única. ■

El recíproco del teorema anterior también es válido, esto es: si $f : A \to B$ y $f' : A/R \to B/S$ son funciones tales que $p_S \circ f = f' \circ p_R$, entonces f necesariamente preserva las relaciones, y $f' = f_*$. En efecto, supongamos que f y f' son dos funciones tales que $p_S \circ f = f' \circ p_R$. Sean $a, a' \in A$ con aRa', entonces $p_R(a) = p_R(a')$ y puesto que $p_S \circ f = f' \circ p_R$, tenemos que $(p_S \circ f)(a) = (p_S \circ f)(a')$. Esto muestra que $f(a)Sf(a')$ y prueba que f preserva las relaciones. Que $f' = f_*$ se sigue de la unicidad de f_* en el teorema anterior.

Ejemplo 4.90 Sean $A = B = \mathbf{Z}$. Sea R la congruencia módulo 4 y sea S la congruencia módulo 2 del Ejemplo 4.76. Entonces $f : A \to B$ dada por $f(n) = n$, preserva las relaciones. Usando el conjunto de representantes $\{0, 1, 2, 3\}$ para A/R y $\{0, 1\}$ para B/S, es fácil verificar que $f_*(0) = f_*(2) = 0$ *y* $f_*(1) = f_*(3) = 1$.

Muchas de las aplicaciones de las relaciones de equivalencia en matemáticas están en la dirección de formular nociones matemáticas, o como usualmente se dice, formalizar las definiciones por abstracción. La esencia de esta técnica es definir una noción como el conjunto de todos los objetos los cuales se desea tengan la cualidad para la noción. Por ejemplo, en un capítulo posterior definiremos un concepto extremadamente necesario en las matemáticas, como es el de número real. La técnica en este caso particular será definiendo relaciones de equivalencia, primero en el conjunto de los números naturales, después en el conjunto cociente, y más aún, en el "cociente del cociente" para llegar a definir los números racionales y finalmente definir otra relación de equivalencia para llegar a definir "un número real".

Ejercicios 4.4

1. Sea X un conjunto. Pruebe que la relación $\subseteq$ en $\mathcal{P}(X)$ es siempre reflexiva y transitiva. Pruebe también que es simétrica si y sólo si $X = \emptyset$.

2. Aquí damos una "demostración" de que toda relación R en un conjunto A que es a la vez simétrica y transitiva, es también reflexiva: "Como R es simétrica, aRb implica bRa. Ahora, dado que R es transitiva, aRb y bRa juntas implican aRa, como se deseaba." Encuentre el error de este argumento.

3. Pruebe que una relación E en A es de equivalencia si y sólo si $Id_A \subseteq E$, $E = E^{-1}$ y $E = E \circ E$.

4. Si R es una relación reflexiva y transitiva en $A = dom\, R$, muestre que $E = R \cap R^{-1}$ es una relación de equivalencia en A.

5. Verifique las afirmaciones del Ejemplo 4.71.

6. Verifique las afirmaciones del Ejemplo 4.76.

7. Considere la relación E en $\mathbf{R}^2$ definida por

$$E = \left\{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) : y_1 - (x_1)^2 = y_2 - (x_2)^2\right\}.$$

   Muestre que E es una relación de equivalencia y describa las clases de equivalencia módulo E.

8. Sean E y E' las siguientes relaciones en $\mathbf{R}$:

$$E = \{(x, y) : y = x + 1\} \qquad , \qquad E' = \{(x, y) : y - x \in \mathbf{Z}\}.$$

   (a) Muestre que E' es una relación de equivalencia en $\mathbf{R}$ y que $E \subseteq E'$.
   (b) Describa las clases de equivalencia módulo E'.
   (c) ¿Es E una relación de equivalencia?

9. Sea $f : X \to Y$ una función. Muestre que:

(a) $E_f = \{(x, y) : f(x) = f(y)\}$ es una relación de equivalencia en X.

(b) Las clases de equivalencia módulo E_f son precisamente los conjuntos $f^{-1}(\{y\})$ para $y \in f(X)$.

10. Sean $f : A \to B$ una función y E una relación de equivalencia en B. Pruebe que
$$f^{\leftarrow}(E) = \left\{(x, y) \in A^2 : f(x)Ef(y)\right\}$$
es una relación de equivalencia en A.

11. Para relaciones R, S en A y B, respectivamente, defina $R \times S$ en $A \times B$ por
$$R \times S = \{((a, b), (c, d)) : aRc \ \wedge \ bSd\}\,.$$
Si R, S son relaciones de equivalencia, pruebe que $R \times S$ es una relación de equivalencia en $A \times B$.

12. Sean S y R relaciones de equivalencia en A, con $S \subseteq R$. Defina
$$R/S = \left\{(Sa, Sb) : \exists a' \in Sa,\ \exists b' \in Sb \text{ tales que } (a', b') \in R\right\}.$$
Muestre que R/S es una relación de equivalencia en el conjunto cociente A/S y que hay una biyección de $(A/S)/(R/S)$ en A/R. (Sugerencia: demuestre primero que $S_a \subseteq R_a$ para cada $a \in A$. Para construir la biyección use 4.89.)

13. Demuestre que una relación R en A es de equivalencia si y sólo si existe una partición $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de A tal que
$$R = \bigcup \{A_\alpha \times A_\alpha : \alpha \in I\}\,.$$
Más aún, los conjuntos A_α son precisamente las clases de equivalencia módulo R.

14. Pruebe que si A es un conjunto y E es una relación de equivalencia en A, entonces A/E es un conjunto.

15. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos particiones de X. Demuestre que la condición $E_{\mathcal{A}} \subseteq E_{\mathcal{B}}$ es equivalente a: cualquier conjunto $A \in \mathcal{A}$ es la unión de una familia $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{B}$.

16. Sea $I = \{x \in \mathbf{R} : 0 \le x \le 1\}$. Para $X \subseteq I$ denótese por $X(r)$ el conjunto de números pertenecientes a I que tienen la forma $x + r + n$, donde $x \in X$ y n es un número entero. Demuestre que, si Z es un conjunto de representantes para la relación $\equiv$ definida por $a \equiv b$ si y sólo si $a - b \in \mathbf{Q}$ entonces:

(a) $Z(r) \cap Z(s) = \emptyset$ para cualesquiera números racionales r, s con $r \neq s$.
(b) $I = \bigcup_{r \in \mathbf{Q}} Z(r)$.

17. Muestre que si $\mathcal{M}$ es una familia no vacía de relaciones de equivalencia en A, entonces $\bigcap \mathcal{M}$ es una relación de equivalencia en A.

18. Preservando la notación del Ejercicio 17 pruebe que existe una relación de equivalencia E en A tal que

    (a) $R \in \mathcal{M}$ implica $R \subseteq E$,
    (b) si E' es una relación de equivalencia en A y $\forall R \in \mathcal{M}$, $R \subseteq E'$, entonces $E \subseteq E'$.

19. Si $\mathcal{M} = \{E_{\mathcal{A}}, E_{\mathcal{B}}\}$, describa $\bigcup \mathcal{M}$ y la relación E cuya existencia se asegura en el ejercicio anterior.

4.5 Órdenes

Otro de los conceptos fundamentales en matemáticas es el concepto de orden en un conjunto. Un orden puede ser definido como una relación con características especiales.

Definición 4.91 Una relación R en A es antisimétrica si para todo $a, b \in A$, aRb y bRa implica $a = b$.

Definición 4.92 Una relación R en A, que es reflexiva, antisimétrica y transitiva se llama orden (parcial) en A. El par (A, R) se le llama conjunto (parcialmente) ordenado.

Primero note que el dominio de un orden en A es A. A aRb se le puede leer como: "a es menor o igual que b", "b es mayor o igual que a", " a precede a b" o "b es sucesor de a" (en el orden R). Así, todo elemento de A es menor (mayor) o igual a sí mismo. Generalmente se usan los símbolos $\leq$, $\preceq$, $\ll$, para denotar órdenes.

Ejemplo 4.93 La relación vacía $\emptyset$, en cualquier conjunto A no es un orden, salvo que $A = \emptyset$.

Ejemplo 4.94 Dado un conjunto A, la relación identidad es un orden.

Ejemplo 4.95 Si $\leq$ es el orden usual en el conjunto de los números reales, entonces $\leq$ es un orden según la Definición 4.92.

Ejemplo 4.96 La relación definida por $m \mid n$ si y sólo si m divide a n, es un orden en el conjunto de los números enteros positivos.

Ejemplo 4.97 Si X es un conjunto, la contención de conjuntos es un orden en $\mathcal{P}(X)$.

Ejemplo 4.98 La relación de pertenencia $\in_A$ restringida a un conjunto A no es un orden, pues no es reflexiva (ver Definición 4.25 y Teorema 2.33).

Ejemplo 4.99 Sea $\mathbf{C}$ el conjunto de los números complejos ($z = a + ib$ con $a, b \in \mathbf{R}$), y definamos $z_1 \preceq z_2$ si y sólo si $\|z_1\| \leq \|z_2\|$, donde $\leq$ es el orden usual de los números reales y $\|z\| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Entonces la relación $\preceq$ es reflexiva y transitiva, pero no antisimétrica. Por lo tanto, no es un orden parcial en $\mathbf{C}$. A las relaciones como $\preceq$ que son reflexivas y transitivas se les llama *pre-órdenes.*

Algunas veces es conveniente modificar una relación de orden como sigue: en lugar de la relación $\leq$ entre números, se puede preferir el uso de la relación $<$ (estrictamente menor). Similarmente, se usará $\subset$ (subconjunto propio) en lugar de $\subseteq$, es decir, $A \subseteq B$ y $A \neq B$.

Definición 4.100 Una relación S en A es *asimétrica* si para todo $a, b \in A$, aSb implica que no ocurre bSa. Es decir, (a, b) y (b, a) no pueden ser ambos elementos de S.

Definición 4.101 Una relación S en A es un orden estricto, si es asimétrica y transitiva.

Ejemplo 4.102 Para cualquier conjunto A, la relación $\emptyset$ es un orden estricto en A.

Teorema 4.103 *(a) Sea R un orden en A, entonces la relación S definida en A por aSb si y sólo si aRb y $a \neq b$, es un orden estricto en A.*

(b) Sea S un orden estricto en A, entonces la relación R definida en A por aRb si y sólo si aSb o $a = b$ es un orden en A.

Así podemos decir que los órdenes estrictos S corresponden a órdenes R y viceversa.

Ejemplo 4.104 Sean $A \neq \emptyset$ y $S = \emptyset$. Entonces el orden R obtenido en el teorema anterior es la relación identidad, Id_A.

Obsérvese que si R es un orden en A no necesariamente para cualesquiera $a, b \in A$, ocurre que aRb o bRa, aún cumpliéndose que $dom\, R = A$.

Definición 4.105 Sean $a, b \in A$ y sea $\leq$ un orden en A. Decimos que a y b son *comparables en el orden* $\leq$ (o que son $\leq$-*comparables*) si:

$$a \leq b \quad o \quad b \leq a.$$

Decimos que a y b son $\leq$-*incomparables* si no son $\leq$-comparables. Similarmente se define para un orden estricto $<$ las nociones de $<$-comparables y $<$-incomparables; por ejemplo, a y b son $<$-comparables si; $a < b$, $a = b$ o $b < a$.

Ejemplo 4.106 Cualesquiera dos números reales son comparables en el orden usual $\leq$.

Ejemplo 4.107 2 y 3 son incomparables en el orden $\mid$ del Ejemplo 4.96.

Ejemplo 4.108 Cualesquiera $a, b \in X$ con $a \neq b$ son incomparables en el orden Id_X.

Ejemplo 4.109 Si A tiene al menos dos elementos, entonces hay elementos incomparables en el conjunto ordenado $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$.

Definición 4.110 Un orden $\leq$ (o $<$) es llamado *lineal* o *total* si cualesquiera dos elementos de A son comparables. El par $(A, \leq)$ es entonces llamado *conjunto linealmente* o *totalmente ordenado.*[5]

Ejemplo 4.111 El orden usual $\leq$ en los números enteros es lineal, mientras que $\mid$ no lo es.

Ejemplo 4.112 Sean $(A, \leq)$ y $(B, \preceq)$ dos conjuntos linealmente ordenados, entonces definiendo en $A \times B$ las siguientes relaciones tenemos ordenes lineales para $A \times B$. La primera llamada orden lexicográfico vertical es: $(a_1, b_1) \ll_v (a_2, b_2)$ si y sólo si $(a_1 < a_2)$ o $(a_1 = a_2$ y $b_1 \preceq b_2)$. La segunda, el orden lexicográfico horizontal: $(a_1, b_1) \ll_h (a_2, b_2)$ si y sólo si $(b_1 < b_2)$ o $(b_1 = b_2$ y $a_1 \leq a_2)$.

Ejemplo 4.113 El conjunto $\mathbf{C}$ de los números complejos con cualquiera de los órdenes lexicográficos es totalmente ordenado.[6]

[5] Lor órdenes lineales fueron considerados originalmente por Cantor [C_1]. Los órdenes parciales fueron introducidos por Hausdorff [H_4].

[6] Esto no quiere decir que los números complejos sean un campo ordenado; de hecho, eso es imposible. Para la definición de campo ordenado vea la página 206.

Definición 4.114 Sea $B \subseteq A$, donde A está ordenado por $\leq$. B es una *cadena en* $(A, \leq)$ si cualesquiera dos elementos de B son $\leq$-comparables.

Por ejemplo el conjunto de todas las potencias de 2, $\left\{2^0, 2^1, 2^2, \ldots\right\}$, es una cadena en el conjunto de los enteros positivos ordenado por divisibilidad.

Es evidente que un orden parcial (respectivamente total) induce un orden parcial (respectivamente total) en cualquier subconjunto; así, una cadena en un conjunto ordenado $(A, \leq)$ es un subconjunto totalmente ordenado en el orden inducido.

Definición 4.115 Sea $\leq$ un orden en A, y sea $B \subseteq A$.

(a) $b \in B$ es el *elemento mínimo de* B en el orden $\leq$, si para todo $x \in B$, $b \leq x$.

(b) $b \in B$ es un *elemento minimal de* B en el orden $\leq$, si no existe $x \in B$ tal que $x \leq b$ y $x \neq b$.

(c) $b \in B$ es el *elemento máximo de* B en el orden $\leq$, si para todo $x \in B$, $x \leq b$.

(d) $b \in B$ es un *elemento maximal de* B en el orden $\leq$, si no existe $x \in B$ tal que $b \leq x$ y $x \neq b$.

Obsérvese el empleo del artículo *el* en las partes *(a)* y *(c)*, y el empleo del artículo *un* en las partes *(b)* y *(d)*. Esta diferencia en el empleo de los diferentes artículos es necesaria. Primeramente, en virtud de la antisimetría, los elementos mínimo y máximo (si existen) son únicos; no sucede así con los minimales y maximales. La razón es que la definición de mínimo y máximo implica que estos elementos son comparables con todo elemento de B, mientras que las definiciones de minimal y maximal no implican que estos elementos (si existen) necesariamente deban ser comparables con cualquier elemento de B. De hecho, cuando un conjunto B tiene dos elementos maximales, estos son incomparables.[7] Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 4.116 Sea $\mathbf{Z}^+$ el conjunto de todos los enteros positivos ordenado por $\mid$. Entonces 1 es el elemento mínimo de $\mathbf{Z}^+$, pero $\mathbf{Z}^+$ no tiene elemento máximo. Si $B = \mathbf{Z}^+ \setminus \{1\}$, entonces B no tiene elemento mínimo en el orden $\mid$ (2 no es el mínimo porque $2 \mid 3$ falla); pero este conjunto tiene muchos (infinitos) elementos minimales, a saber, 2, 3, 5, 7, etc. (exactamente todos los números primos) son minimales. B no tiene ni máximo ni maximales.

[7] En castellano no se emplean las palabras maximal y minimal. Algunas traducciones prefieren utilizar los términos "elemento máximo" y "elemento mínimo" como nombres para tales conceptos; "máximo" y "mínimo" para el elemento máximo y mínimo. Creemos que la terminología aquí empleada evita confusiones.

Ejemplo 4.117 Sea A cualquier conjunto con el orden dado por la relación identidad, Id_A. Si $B \subseteq A$ entonces cualquier elemento de B es tanto minimal como maximal.

En el siguiente teorema se encuentran algunas propiedades de los elementos mínimo y minimal. La demostración se deja como un ejercicio.

Teorema 4.118 *Sean A ordenado por $\leq$, y $B \subseteq A$.*

(a) B tiene a lo más un elemento mínimo.

(b) El elemento mínimo de B (si existe) es también minimal.

(c) Si B es una cadena, entonces todo elemento minimal de B es también un mínimo.

El teorema es también válido si las palabras "mínimo" y "minimal" son reemplazadas por "máximo" y "maximal", respectivamente.

Definición 4.119 Sean $\leq$ un orden en A y $B \subseteq A$.

(a) $a \in A$ es una *cota inferior de* B en el conjunto ordenado $(A, \leq)$, si $a \leq x$ para todo $x \in B$.

(b) $a \in A$ es llamado *ínfimo de* B en $(A, \leq)$ (o *máxima cota inferior*), si es el elemento máximo del conjunto de todas las cotas inferiores de B en $(A \leq)$.

(c) $a \in A$ es una *cota superior* de B en el conjunto ordenado $(A, \leq)$, si $x \leq a$ para todo $x \in B$.

(d) $a \in A$ se llama *supremo de* B en $(A, \leq)$ (o *mínima cota superior*), si es el elemento mínimo del conjunto de todas las cotas superiores de B en $(A, \leq)$.

La diferencia entre "a es el mínimo de B" y "a es una cota inferior de B", es que el segundo concepto no requiere que $a \in B$. Un conjunto puede tener muchas cotas inferiores; pero el conjunto de todas las cotas inferiores de B puede tener a lo más un elemento máximo. Así, B puede tener a lo más un ínfimo. Similar observación puede hacerse para máximo, cota superior y supremo. A continuación expresamos formalmente estas ideas.

Teorema 4.120 *Sean $(A, \leq)$ un conjunto ordenado y $B \subseteq A$.*

(a) B tiene a lo más un ínfimo.

(b) Si b es el elemento mínimo de B, entonces b es ínfimo de B.

(c) Si b es el ínfimo de B y $b \in B$, entonces b es el elemento mínimo de B.

(d) $b \in A$ es el ínfimo de B en $(A, \leq)$ si y sólo si

(i) $b \leq x$, para todo $x \in B$, y

(ii) si $b' \leq x$, para todo $x \in B$, entonces $b' \leq b$.

El teorema es válido si las palabras "mínimo" e "ínfimo" son reemplazadas por "máximo" y "supremo" y "$\leq$" es reemplazado por "$\geq$" en (i) y (ii).

DEMOSTRACIÓN:

(a) Está prácticamente probada en la observación que precede al teorema.

(b) El mínimo elemento de B es ciertamente una cota inferior de B. Si b' es cualquier otra cota inferior de B, $b' \leq b$ puesto que $b \in B$. Así, b es el elemento máximo del conjunto de todas las cotas inferiores de B.

(c) Es obvio.

(d) Esta es sólo una reformulación de la definición de ínfimo. ■

Empleando los Teoremas 4.118 y 4.120 podemos usar una notación para denotar mínimo, máximo, ínfimo y supremo de un subconjunto B en un conjunto ordenado $(A, \leq)$. La notación comúnmente empleada es: $\min B$, $\max B$, $\inf B$ y $\sup B$, respectivamente.

Ejemplo 4.121 Sea $\leq$ el orden usual en el conjunto de los números reales. Analicemos los conjuntos $B_1 = \{x \in \mathbf{R} : 0 < x < 1\}$, $B_2 = \{x \in \mathbf{R} : 0 \leq x < 1\}$, $B_3 = \{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$, $B_4 = \{x \in \mathbf{R} : x < 0\}$. B_1 no tiene elemento máximo ni elemento mínimo, pero cualquier $b \leq 0$ es una cota inferior; así, 0 es la máxima cota inferior de B_1, es decir, $\inf B_1 = 0$. Similarmente, cualquier $b \geq 1$ es cota superior de B_1, y $\sup B_1 = 1$. El conjunto B_2 tiene elemento mínimo, $\min B_2 = 0$, pero no tiene máximo; sin embargo, $\sup B_2 = 1$. El conjunto B_3 no tiene elemento máximo y tampoco tiene supremo; de hecho, B_3 no es acotado superiormente en $(\mathbf{R}, \leq)$; $\inf B_3 = 0$. Similarmente, B_4 no tiene cotas inferiores y, por tanto, no tiene ínfimo.

Ejemplo 4.122 Un conjunto puede ser acotado superiormente y no tener supremo. Considérese $X = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ y sea

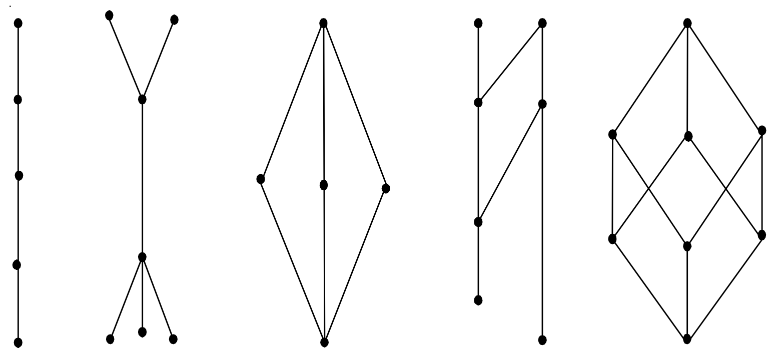
$$B = \{x \in X : x \text{ es negativo}\}.$$

Entonces B es acotado superiormente, pero no tiene supremo en el conjunto ordenado $(X, \leq)$, donde $\leq$ es el orden usual en los números reales.

Si tenemos un conjunto ordenado finito $(A, \leq)$, entonces $x < y$ si y sólo si existe una cadena de la forma

$$x = x_1 < x_2 < \cdots < x_n = y.$$

El resultado anterior permite representar a cualquier conjunto ordenado finito por medio de un diagrama. Los elementos de A son representados por puntos acomodados acorde con la siguiente regla: el punto x_2 es colocado arriba del punto x_1 si y sólo si $x_1 < x_2$, y si no existen otros elementos de A que sean sucesor de x_1 y precedan a x_2, los puntos son unidos por un segmento de línea. Así, $x < y$ si y sólo si existe una línea quebrada ascendente que conecta a x y y. Algunos ejemplos de tales diagramas son mostrados en la figura (4.5.1).



(4.5.1)

El primero es el diagrama de una cadena de cinco elementos. Claramente, el diagrama de cualquier cadena tiene esta forma. El último de los diagramas corresponde al conjunto potencia de un conjunto con tres elementos, ordenado por la inclusión; el punto en el nivel más bajo representa al conjunto vacío, los puntos del siguiente nivel representan los subconjuntos unitarios, y así sucesivamente. Tales diagramas no sólo sirven para representar un conjunto ordenado por una figura que muestre la relación de orden, también pueden ser usados para definir conjuntos ordenados: la relación de orden es justamente la indicada por la variedad de líneas quebradas.

Para preparar nuestra siguiente definición que relaciona conjuntos ordenados, discutiremos un ejemplo. Considere el conjunto

$$\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\},$$

cuyos miembros son los divisores positivos de 30, ordenados por la relación $\leq$, donde $x \leq y$ si y sólo si x es múltiplo de y. Se deja como un ejercicio mostrar que el diagrama de este conjunto ordenado es idéntico al diagrama asociado a los subconjuntos de un conjunto de tres elementos ordenado por la contención. A pesar de que estos conjuntos ordenados son distintos, ellos son indistinguibles en su estructura como conjuntos ordenados. Es ciertamente notable que exista este tipo de relaciones entre dos conjuntos ordenados ya que cualquier propiedad de uno que sea expresable en términos de su relación de orden tiene una análoga en el otro conjunto. La identidad de los diagramas de los dos conjuntos ordenados antes mencionados implican, primero: la existencia de una biyección entre los conjuntos; segundo: que la relación de orden entre dos elementos de uno de los conjuntos, es la misma que para el correspondiente par de elementos en el otro conjunto.

Definición 4.123 Un *isomorfismo* entre dos conjuntos ordenados $(P, \leq)$ y $(Q, \preceq)$ es una función biyectiva $h : P \to Q$ tal que para todo $p_1, p_2 \in P$,

$$p_1 \leq p_2 \text{si y sólo si } h(p_1) \preceq h(p_2).$$

Si existe un isomorfismo entre $(P, \leq)$ y $(Q, \preceq)$, entonces $(P, \leq)$ y $(Q, \preceq)$ son *isomorfos* y la biyección h se llama *isomorfismo* entre $(P, \leq)$ y $(Q, \preceq)$.

La expresión "si y sólo si" en la definición es muy importante. Por ejemplo, establece que dos elementos en P son comparables siempre y cuando sus imágenes vía la biyección son comparables en Q. Además, dice cómo deben compararse dos elementos en P si sabemos cómo se comparan sus imágenes en Q. En el caso en que se tengan conjuntos linealmente ordenados, el siguiente teorema nos asegura que el "sólo si" puede suprimirse en la Definición 4.123.

Teorema 4.124 *Sean $(P, \leq)$ y $(Q \preceq)$ conjuntos linealmente ordenados y sea $h : P \to Q$ una biyección tal que $h(p_1) \preceq h(p_2)$ siempre que $p_1 \leq p_2$. Entonces h es un isomorfismo entre $(P, \leq)$ y $(Q, \preceq)$.*

DEMOSTRACIÓN:

Debemos mostrar que si $p_1, p_2 \in P$ con $p_1 \neq p_2$ son tales que $h(p_1) \preceq h(p_2)$, entonces $p_1 \leq p_2$. Si suponemos que p_1 no es menor que p_2, como $\leq$ es un orden lineal en P, entonces $p_1 = p_2$, o bien $p_2 < p_1$. Hemos supuesto que $p_1 \neq p_2$, por lo tanto, $p_2 < p_1$. Por hipótesis esto implica que $h(p_2) \prec h(p_1)$, lo cual es una contradicción. ■

Proposición 4.125 *(a) Si $(P, \leq)$ y $(Q, \preceq)$ son conjuntos ordenados isomorfos y $\leq$ es un orden lineal, entonces $\preceq$ también es un orden lineal.*

(b) La función identidad es un isomorfismo de $(P, \leq)$ en sí mismo.

(c) Si h es un isomorfismo entre $(P, \leq)$ y $(Q, \preceq)$, entonces h^{-1} es un isomorfismo entre $(Q, \preceq)$ y $(P \leq)$.

(d) Si f es un isomorfismo entre $(P, \leq)$ y $(Q, \preceq)$ y g es un isomorfismo entre $(Q, \preceq)$ y $(T, \ll)$, entonces $g \circ f$ es un isomorfismo entre $(P, \leq)$ y $(T, \ll)$.

La parte *(a)* de la proposición anterior puede interpretarse diciendo que si tenemos dos conjuntos ordenados isomorfos y uno de ellos tiene la propiedad de ser lineal, entonces el otro también la tiene. Otras propiedades que se preservan con isomorfismos pueden encontrarse en los ejercicios. Las partes *(b), (c)* y *(d)* nos dicen que la propiedad "... es isomorfo a ..." es reflexiva, simétrica y transitiva. Así, desde el punto de vista de los conjuntos ordenados es indistinto manipular un conjunto ordenado o un isomorfo a él.

Un ejemplo típico de un conjunto ordenado (parcialmente) es el conjunto potencia ordenado por la contención. El siguiente resultado muestra que cualquier conjunto ordenado es básicamente de este tipo.

Teorema 4.126 *Todo conjunto ordenado $(A, \leq)$ es isomorfo a una familia indizada de subconjuntos de A, parcialmente ordenada por la contención.*

DEMOSTRACIÓN:

Para cada $a \in A$, definamos $S_a = \{x \in A : x \leq a\}$. Entonces la función $h : A \to \{S_a\}_{a \in A}$ definida por $h(a) = S_a$ verifica la afirmación. En efecto, claramente h es una biyección; además, $a_1 \leq a_2$ si y sólo si $a_1 \in S_{a_2}$. Por la transitividad, $S_{a_1} \subseteq S_{a_2}$. Luego, $a_1 \leq a_2$ si y sólo si $S_{a_1} \subseteq S_{a_2}$. ■

Los conjuntos S_a definidos en la demostración anterior son usados con frecuencia.

Definición 4.127 Si $(A, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, el *segmento inicial determinado por $a \in A$* es el conjunto

$$U_a = \{x \in A : x < a\}.$$

El siguiente tipo de conjunto totalmente ordenado es muy importante.

Definición 4.128 Un conjunto parcialmente ordenado $(W, \leq)$ se llama *bien ordenado* si cada subconjunto no vacío $B \subseteq W$ tiene elemento mínimo. En este caso al orden $\leq$ se le llama *buen orden.*

Cualquier conjunto bien ordenado $(W, \leq)$ es totalmente ordenado, puesto que cada subconjunto $\{a, b\} \subseteq W$ tiene elemento mínimo. Más aún, el orden inducido (ver Ejercicio 4.5.9) a un subconjunto de un conjunto bien ordenado es un buen orden en el subconjunto. Es costumbre referirse al mínimo elemento de un subconjunto B como primer elemento.

Ejemplo 4.129 $\emptyset$ es un conjunto bien ordenado.

Ejemplo 4.130 Sea $(A, \leq)$ un conjunto linealmente ordenado. Cualquier conjunto $B = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subseteq A$ es un conjunto bien ordenado con el orden inducido por $\leq$ en B.

Ejemplo 4.131 El ordenamiento por inclusión en $\mathcal{P}(X)$ no es un buen orden en cualquier X con más de un elemento.

Ejemplo 4.132 Sean $(W, \leq)$ un conjunto bien ordenado y $q \notin W$. En $W \cup \{q\}$ definimos un buen orden que coincida con $\leq$ en W de la manera siguiente: $q \preceq q$, para cada $w \in W$, $w \preceq q$, y para $w_1, w_2 \in W$, $w_1 \preceq w_2$ si y sólo si $w_1 \leq w_2$. Decimos que $W \cup \{q\}$ se forma adjuntando un punto a W como último elemento. Demostraremos que $\preceq$ es, en efecto, un buen orden. Para cada $B \subseteq W \cup \{q\}$ no vacío, o bien $B = \{q\}$ o $B \cap W \neq \emptyset$. En el último caso, el primer elemento de $B \cap W$ en $(W, \leq)$ es el primer elemento de B en $(W \cup \{q\}, \preceq)$. Por lo tanto, $(W \cup \{q\}, \preceq)$ es un conjunto bien ordenado.

Cada elemento w en un conjunto bien ordenado $(W, \leq)$ que tiene un sucesor en W, tiene un *sucesor inmediato*; esto es, podemos encontrar $s \in W$ con $s \neq w$ que satisfaga $w \leq s$ y tal que ningún $c \in W \setminus \{s\}$ satisface $w \leq c \leq s$. En efecto, necesitamos tan sólo elegir $s = \min \{x \in W : w < x\}$, lo cual es posible dado que $\{x \in W : w < x\} \neq \emptyset$ y $(W, \leq)$ es bien ordenado. Sin embargo, aún cuando un elemento w en un conjunto bien ordenado tenga un predecesor, no necesariamente tiene un predecesor inmediato. Por ejemplo, si $W \neq \emptyset$ es un conjunto bien ordenado y no acotado superiormente, entonces adjuntando un punto q como último elemento de W a la manera del Ejemplo 4.132, q no tiene un predecesor inmediato.

Veamos ahora algunos otros tipos importantes de funciones definidas entre conjuntos ordenados.

Definición 4.133 Sean $(A, \leq)$ y $(B, \preceq)$ conjuntos linealmente ordenados y $f : A \to B$ una función.

(a) f se llama *creciente* si $a_1, a_2 \in A$ con $a_1 \leq a_2$ implica $f(a_1) \preceq f(a_2)$.

(b) f se llama *decreciente* si $a_1, a_2 \in A$ con $a_1 \leq a_2$ implica $f(a_1) \succeq f(a_2)$.

A una función creciente también se le dice *función que preserva el orden* y a una función decreciente también se le dice *función que invierte el orden.*

Lema 4.134 *Si $(W, \leq)$ es un conjunto bien ordenado y $f : W \to W$ es una función creciente e inyectiva, entonces $f(x) \geq x$ para cada $x \in W$.*

DEMOSTRACIÓN:

Supongamos que $X = \{x \in W : f(x) < x\}$ es no vacío y sea $w = \min X$. Sea $f(w) = z$. Como $w \in X$, $z < w$, y siendo f creciente se cumple que $f(z) < z$, lo cual contradice la elección de w. ■

Corolario 4.135 *El único isomorfismo de un conjunto bien ordenado en sí mismo es la identidad.*

Demostración:

Por el Lema 4.134, si $(W, \leq)$ es un conjunto bien ordenado y

$$f : W \to W$$

es un isomorfismo, entonces $f(x) \geq x$ y $f^{-1}(x) \geq x$ para todo $x \in W$. Esto implica que $f(x) = x$ para todo $x \in W$; o sea, $f = Id_W$. ∎

Corolario 4.136 *Si dos conjuntos bien ordenados son isomorfos, entonces el isomorfismo es único.*

Lema 4.137 *Ningún conjunto bien ordenado es isomorfo a un segmento inicial de sí mismo.*

Demostración:

Supongamos que $(W, \leq)$ es un conjunto bien ordenado que es isomorfo a uno de sus segmentos iniciales, y sea f el isomorfismo entre ellos. Entonces para alguna $u \in W$,

$$f(W) = \{x \in W : x < u\},$$

luego $f(u) < u$, que contradice el Lema 4.134. ∎

Finalmente, veamos el resultado más relevante sobre conjuntos bien ordenados que presentamos en esta sección.

Teorema 4.138 *Si $(W_1, \leq_1)$ y $(W_2, \leq_2)$ son dos conjuntos bien ordenados, entonces exactamente uno de los siguientes tres casos se cumple:*
(a) $(W_1, \leq_1)$ es isomorfo a $(W_2, \leq_2)$;
(b) $(W_1, \leq_1)$ es isomorfo a un segmento inicial de $(W_2, \leq_2)$;
(c) $(W_2, \leq_2)$ es isomorfo a un segmento inicial de $(W_1, \leq_1)$.

Demostración:

Para $u_i \in W_i$ $(i = 1, 2)$, sea $W_i(u_i) = \{x \in W_i : x < u_i\}$ el segmento inicial de W_i determinado por u_i. Sea

$$f = \{(x, y) \in W_1 \times W_2 : W_1(x) \text{ es isomorfo a } W_2(y)\}.$$

Usando el Lema 4.137, es fácil ver que f es inyectiva. Si h es un isomorfismo entre $W_1(x)$ y $W_2(y)$ y $x' < x$, entonces $W_1(x')$ y $W_2(h(x'))$ son isomorfos; de aquí se sigue que f es creciente.

Si $dom\, f = W_1$ y $ran\, f = W_2$, entonces ocurre el caso *(a)*.

Si $y_1 <_2 y_2$ y $y_2 \in ran\, f$, entonces $y_1 \in ran\, f$. Así, si $ran\, f \neq W_2$ y $y_0 = \min W_2 \setminus ran\, f$, tenemos que $ran\, f = W_2(y_0)$. Necesariamente, $dom\, f = W_1$, de otro modo tenemos $(x_0, y_0) \in f$, donde $x_0 = \min W_1 \setminus dom\, f$. Así, el caso *(b)* se cumple.

Similarmente, si $dom\, f \neq W_1$, entonces se tiene el caso *(c)*.

Por el Lema 4.137, los tres casos considerados son mutuamente excluyentes.

■

Intuitivamente este resultado puede interpretarse diciendo que los conjuntos bien ordenados pueden compararse por su "longitud", un hecho que será de mucha importancia en lo sucesivo.

Ejercicios 4.5

1. Sea R una relación reflexiva y transitiva. Defina $\approx$ en A por $a \approx b$ si y sólo si (aRb) y (bRa).

   (a) Muestre que $\approx$ es una relación de equivalencia en A.

   (b) Si $\ll$ se define por $[a] \ll [b]$ si y sólo si aRb; muestre que $(A/\approx, \ll)$ es un conjunto ordenado.

2. Muestre que $R \subseteq A \times A$ es reflexiva y transitiva si y sólo si $Id_A \subseteq R$ y $R \circ R = R$.

3. Sea $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ el conjunto de todas las funciones de los números reales en sí mismos. Pruebe que definiendo $f \preceq g$ si y sólo si $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x) \leq g(x)$, $(\mathbf{R}^{\mathbf{R}}, \preceq)$ es un conjunto ordenado.

4. Pruebe el Teorema 4.103.

5. (a) Sea R un orden en A. Sean S el correspondiente orden estricto en A y R^* el orden correspondiente a S. Muestre que $R = R^*$.

   (b) Sea S un orden estricto en A, sea R su correspondiente orden en A, y sea S^* el orden estricto correspondiente a R. Entonces $S = S^*$. Ver Teorema 4.103.

6. Formule las definiciones de elementos incomparable, maximal, minimal, máximo, mínimo, supremo e ínfimo en términos de órdenes estrictos.

7. Pruebe que el Axioma de Fundación es equivalente a que todo conjunto no vacío A tiene un elemento $\in_A$-minimal.

8. Sea R un orden en A. Pruebe que R^{-1} es también un orden en A (se llama *dual de* R), y para $B \subseteq A$ se cumple que

   (a) a es el mínimo elemento de B en R^{-1} si y sólo si a es el máximo elemento de B en R.

   (b) Similarmente para minimal y maximal, y supremo e ínfimo.

9. Sean R un orden en A y $B \subseteq A$. Muestre que $R \cap (B \times B)$ es un orden en B. Este orden se llama *orden inducido por* R *en* B.

10. Muestre que el diagrama correspondiente al conjunto

$$\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$$

    con el orden inducido por el dual de la divisibilidad en los enteros, es idéntico al último presentado en la figura (4.5.1).

11. Dar ejemplos de un conjunto ordenado finito (A, R) y un subconjunto $B \subseteq A$ tales que:

    (a) B tiene un elemento máximo.

    (b) B no tiene elemento mínimo.

    (c) B no tiene máximo, pero B tiene supremo.

    (d) B no tiene supremo.

12. Sean $(A, \leq)$ y $(B, \preceq)$ dos conjuntos ordenados con $A \cap B = \emptyset$. Defina $\ll$ como sigue:

$$\begin{array}{lrr} x \ll y & \text{si y sólo si} & x, y \in A \text{ y } x \leq y \\ & \text{o} & x, y \in B \text{ y } x \preceq y \\ & \text{o} & x \in A \text{ y } y \in B. \end{array}$$

    Muestre que $\ll$ es un orden en $A \cup B$ y que $\ll$ restringido a A es $\leq$, y $\ll$ restringido a B es $\preceq$. Intuitivamente $\ll$ pone a todo elemento de B después de todo elemento de A y coincide con los ordenes originales en A y B; esta es la razón de que al orden $\ll$ se le llama *orden de yuxtaposición*.

13. Verifique el Ejemplo 4.112.

14. Sean $(A, \leq)$ y $(B, \preceq)$ dos conjuntos ordenados. Muestre que $\ll$ es un orden parcial en $A \times B$, donde $\ll$ se define como $(a_1, b_1) \ll (a_2, b_2)$ si y sólo si $a_1 \leq a_2$ y $b_1 \preceq b_2$. El conjunto ordenado $(A \times B, \ll)$ se llama *producto (cartesiano)* de los conjuntos ordenados $(A, \leq)$ y $(B, \preceq)$.

15. Sea $\mathcal{F}$ la familia de todas las funciones desde X hacia T (ver Ejercicio 4.2.19). Defina la relación $\leq$ en $\mathcal{F}$ por

$$f \leq g \quad \text{si y sólo si} \quad f \subseteq g.$$

   (a) Pruebe que $\leq$ es un orden.
   (b) Sea $\mathcal{A} \neq \emptyset$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$. Pruebe que $\sup \mathcal{A}$ existe si y sólo si $\mathcal{A}$ es una familia de funciones compatibles. Pruebe además que si $\sup \mathcal{A}$ existe, entonces $\sup \mathcal{A} = \bigcup \mathcal{A}$.

16. Sean $A \neq \emptyset$ y $Pt(A)$ el conjunto de todas las particiones de A. Defina una relación $\leq$ en $Pt(A)$ por: $\mathcal{S}_1 \leq \mathcal{S}_2$ si y sólo si para todo $B \in \mathcal{S}_1$, existe $C \in \mathcal{S}_2$ tal que $B \subseteq C$.

   Cuando $\mathcal{S}_1 \leq \mathcal{S}_2$ se dice que la partición $\mathcal{S}_1$ es un *refinamiento* de $\mathcal{S}$.

   (a) Muestre que $\leq$ es un orden.
   (b) Sean $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \in Pt(A)$. Muestre que $\{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2\}$ tiene ínfimo. (Sugerencia: defina $\mathcal{S} = \{B \cap C : B \in \mathcal{S}_1,\ C \in \mathcal{S}_2\}$).
   ¿Cómo es la relación de equivalencia $E_{\mathcal{S}}$ con respecto a las relaciones de equivalencia $E_{\mathcal{S}_1}$ y $E_{\mathcal{S}_2}$?
   (c) Sea $\mathcal{T} \subseteq Pt(A)$, $\mathcal{T} \neq \emptyset$. Muestre que $\inf \mathcal{T}$ existe.
   (d) Sea $\mathcal{T} \subseteq Pt(A)$, $\mathcal{T} \neq \emptyset$. Muestre que $\sup \mathcal{T}$ existe. (Sugerencia: sea $\mathcal{T}'$ el conjunto de todas las particiones $\mathcal{S}$ con la propiedad que cualquier partición de $\mathcal{T}$ es un refinamiento de $\mathcal{S}$. Muestre que $\mathcal{T}' \neq \emptyset$ y que $\sup \mathcal{T} = \sup \mathcal{T}'$.)

17. Pruebe el Teorema 4.118.

18. Pruebe la segunda parte del Teorema 4.120.

19. Muestre que en una cadena los conceptos de elemento máximo y elemento maximal coinciden, y muestre lo mismo para elemento mínimo y elemento minimal.

20. Un conjunto (parcialmente) ordenado es una *retícula* si para cada $a, b \in A$, el conjunto $\{a, b\}$ tiene supremo e ínfimo.

(a) Muestre que $(\mathbf{R}^{\mathbf{R}}, \preceq)$ como en el problema 3 es una retícula.

(b) Muestre que $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ es una retícula.

(c) Muestre que $(\mathbf{Z}, |)$ es una retícula.

(d) Muestre que $(Pt(A), \leq)$ es una retícula.

21. Sea $(X, \leq)$ un conjunto totalmente ordenado. Una *cortadura de* X es un par de subconjuntos A, B que satisfacen: *(i)* $X = A \cup B$, *(ii)* $A \cap B = \emptyset$ y *(iii)* $a \in A \ \wedge \ b \in B \Rightarrow a \leq b$. Si A, B y A', B' son dos cortaduras de X, pruebe que $A \subseteq A'$ o que $A' \subseteq A$.

22. Sea $(A, \leq)$ un conjunto ordenado con la propiedad de que todo subconjunto no vacío con una cota superior tiene supremo. Pruebe que A tiene la propiedad de que cualquier subconjunto de A no vacío con una cota inferior tiene ínfimo. A las propiedades anteriores se les llama propiedad de la *mínima cota superior* y propiedad de la *máxima cota inferior*.

23. Si $(A, \leq)$ es un conjunto ordenado y $a, b \in A$ con $a \leq b$, se define el intervalo cerrado de extremos a, b como el conjunto

$$[a, b] = \{x \in A : a \leq x \text{ y } x \leq b\} .$$

Pruebe que el conjunto de intervalos cerrados ordenados por la inclusión es isomorfo a un subconjunto del producto de $(A, \leq)$ y su dual $(A, \leq^{-1})$.

24. Pruebe la Proposición 4.125.

25. Muestre que h es un isomorfismo entre $(A, \leq)$ y $(B, \preceq)$ si y sólo si h y h^{-1} preservan el orden.

26. Pruebe por medio de un ejemplo que si $(A, \leq)$ y $(B, \preceq)$ son conjuntos ordenados y $f : A \rightarrow B$ es una biyección que preserva el orden, entonces $f^{-1} : B \rightarrow A$ no necesariamente preserva el orden.

27. Muestre que si A es un conjunto finito, entonces todo orden total en A es un buen orden.

28. Muestre que un conjunto bien ordenado $(W, \leq)$ tiene la propiedad de la mínima cota superior.

29. Sean A, B conjuntos bien ordenados. Demuestre que los órdenes lexicográfico vertical y lexicográfico horizontal en $A \times B$ son también buenos órdenes.

30. Pruebe el Corolario 4.136.

31. Sea $(A, \leq)$ un conjunto bien ordenado. Muestre que no existen una sucesiones $\{a_n \in A : n \in \mathbf{N}\}$ tales que $a_{n+1} \leq a_n$ y $a_n \neq a_{n+1}$ para toda $n \in \mathbf{N}$.

4.6 Sobre Clases

Considere la siguiente forma de asignación: A cada par ordenado de conjuntos (A, B) le podemos asociar de manera única el conjunto $A \cup B$. Parece claro que esta regla de asociación permite establecer una función. No obstante, esta "función" tendría como dominio el producto cartesiano de la clase de todos los conjuntos con sí misma (*clase* como en la Convención 2.5); por lo que no sería, propiamente hablando, una función por no ser un conjunto. Sin embargo, la regla de asociación cumple la propiedad importante de las funciones, a saber,

$$(a, b) \in f \quad \text{y} \quad (a, c) \in f \quad \text{implica} \quad b = c.$$

Por esta razón, no es mala idea considerar a esta asignación como una "función" entre clases. Pensada como "función entre clases" la asignación que estamos considerando quedaría expresada como:

$$\mathbf{Un} : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$$

donde $\mathbf{V}$ es la clase de todos los conjuntos y $\mathbf{Un}(A, B) = A \cup B$. De esta manera, la unión de conjuntos puede ser pensada como una función. La ventaja es que podemos aprovechar nuestro conocimiento sobre funciones legítimas para intuir propiedades generales que, como operación, posea la unión de conjuntos.

Ahora bien, pensar en $\mathbf{Un}$ como función requiere que primero tengamos claro qué entendemos por $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$.

Si $\mathbf{K}_1$ y $\mathbf{K}_2$ son dos clases, de manera completamente análoga a las definiciones para conjuntos, es posible "definir" la unión, intersección, complemento y producto cartesiano de $\mathbf{K}_1$ y $\mathbf{K}_2$. Por ejemplo, la unión de $\mathbf{K}_1$ y $\mathbf{K}_2$ está dada por

$$\mathbf{K}_1 \cup \mathbf{K}_2 = \langle x : (x \in \mathbf{K}_1) \ \vee \ (x \in \mathbf{K}_2) \rangle$$

y el producto cartesiano de $\mathbf{K}_1$ y $\mathbf{K}_2$ está dado por

$$\mathbf{K}_1 \times \mathbf{K}_2 = \langle (x, y) : x \in \mathbf{K}_1, \ y \in \mathbf{K}_2 \rangle .$$

Remarcamos que escribimos "*definir*" porque en realidad no estamos haciendo una definición en nuestra teoría, sino una convención fuera de ella.

Habiendo establecido las operaciones elementales entre clases, extender conceptos como los de función, orden y relación de equivalencia a clases ya no debe presentar dificultades.

Además de que la extensión de conceptos a clases puede llegar a ser fructífera para intuir propiedades generales sobre conjuntos, esta extensión nos permitirá mayores posibilidades para expresarnos. Por ejemplo, podemos decir que la relación "conjuntos ordenados isomorfos" es de equivalencia en la clase de todos los conjuntos ordenados (que no es un conjunto).

En lo sucesivo emplearemos estas convenciones sobre clases; pero, *para no tener repercusión en el formalismo de nuestra teoría, las expresiones que involucren clases deben ser pensadas únicamente como abreviaciones para expresiones que no involucren clases*. En el ejemplo anterior sobre conjuntos ordenados isomorfos, formalmente se debe decir: en cualquier familia de conjuntos ordenados, la relación de isomorfismo es una relación de equivalencia.

También, con el afán de evitar posibles confusiones, distinguiremos las funciones, órdenes y relaciones de equivalencia entre clases, de los respectivos conceptos para conjuntos escribiendo la palabra *clase* entre paréntesis antes del concepto correspondiente. Así escribiremos (clase) función, (clase) orden parcial, etc.